УДК 517.91

М.Ф. Стасюк, О.О. Власій
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

РЕКУРЕНТНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Отримано еквівалентне тричленне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку.

The equivalent trinomial recurrence relation is obtained for second order quasi-differential equation with generalized coefficients.

1. Розглянемо квазідиференціальне рівняння другого порядку

$$l^2[y] = \varphi(x), \qquad (1)$$

де

$$l^2[y] \equiv -(a_{00}y' + a_{01}y)' + a_{01}y' - a_{11}y \ . \qquad (2)$$

На коефіцієнти рівняння (1) накладемо такі обмеження :

1) $a_{00}^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна на деякому відкритому інтервалі $I \subset R$;

2) $a_{10}(x)$, $a_{01}(x)$ – квадратично сумовні за Лебегом на I;

3) $a_{11}(x) = b_{11}'(x)$, $\varphi(x) = f'(x)$ – міри, породжені неперервними справа функціями обмеженої на I варіації $b_{11}'(x)$ і $f(x)$ відповідно (b_{11}, $f \subset B_{loc}^{+}(I)$).

Вираз

$$y^{[1]}(x) = a_{00}y' + a_{10}y \qquad (3)$$

називається квазіпохідною диференціального виразу (2). За допомогою вектора $\overline{y} = colon(y(x), \quad y^{[1]}(x)$ квазідиференціальне рівняння (1) зводиться до системи

$$y = A(x) \cdot y + \overline{F'}(x) \ , \qquad (4)$$

де

$$A(x) = C'(x) = \begin{pmatrix} -a_{00}^{-1}a_{10} & a_{00}^{-1} \\ -(a_{01}a_{00}^{-1}a_{10} + a_{11} & a_{01}a_{00}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{F'}(x) = colon(0, f'(x)) \ .$$

Нехай $B(x,\alpha)$ – фундаментальна матриця однорідної системи

$$y' = A(x) \cdot y \ . \qquad (5)$$

Відомо [1] , що матриця $B(x,\alpha)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$B(x,\alpha) = E + \int_{\alpha}^{x} B(x,\alpha)dC(\alpha) \qquad (6)$$

і вагова матриця-функція $C(x)$ через вимоги на коефіцієнти рівняння (1) в точці розриву x_k має стрибок

$$\Delta C(x_k) = C(x_k) - C(x_k - 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta b_{11}(x_k) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -S_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Фундаментальна матриця для системи (5) має таку структуру [1]:

$$B(x,\alpha) = \begin{pmatrix} K^{\{1\}}(x,\alpha) & K(x,\alpha) \\ K^{[1]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[1]}(x,\alpha) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де $K(x,\alpha)$ – функція Коші однорідного квазідиференціального рівняння $l_2[y]=0$, $K^{[1]}(x,\alpha)$ – її квазіпохідна (3) по змінній x в сенсі виразу $l_2[y]$; $K^{\{1\}}(x,\alpha)$ – квазіпохідна функції $K(x,\alpha)$ по змінній α в сенсі спряженого до $l_2[y]$ виразу

$$l_2^*[y] = -(a_{00}y' + a_{01}y)' + a_{10}y' + a_{11}y ,$$

для якого

$$y^{\{1\}}(x) = a_{00}y' + a_{01}y , \quad (9)$$

а $K^{[1]\{1\}}$ – мішана похідна в сенсі (2) по змінній x і в сенсі (9) по змінній α.

Відомо [1], що розв'язок неоднорідної системи (4), який набуває в точці $x_0 \in I$ значення $\overline{y}(x_0) = colon(y(x_0), y^{[1]}(x_0))$, записується у формі Коші

$$\overline{y}(x) = B(x,x_0)\overline{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} B(x,\alpha)d\overline{F}(\alpha) . \quad (10)$$

Виберемо тепер довільні три впорядковані точки $x_{n-1} < x_n < x_{n+1}$ з інтервалу I.

Використовуючи форму розв'язку (10) та властивість фундаментальної матриці

$$B(x_k,x_0) = (E + \Delta C(x_k))\, B(x_k - 0,x_0) , \quad (11)$$

отримуємо

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_n^{[1]} \end{pmatrix} = B_{n.n-1}\begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-1}^{[1]} \end{pmatrix} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} B_{n.\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ df \end{pmatrix}, \quad (12)$$

де $y_i = y(x_i)$, $B_{i,j} = B(x_i,x_j)$; $K^{[1]\{1\}}(x,\alpha)$ – друга змішана квазіпохідна.

Враховуючи структуру фундаментальної матриці (8) і розписавши покоординатно формулу (12), одержимо формули

$$y_{n-1}^{[1]} = \frac{1}{K_{n,n-1}}\left[y_n - K_{n,n-1}^{\{1\}}y_n - I_{n-1.n}\right]; \quad (13)$$

$$y_n^{[1]} = \frac{1}{K_{n+1,n}}\left[y_{n+1} - K_{n+1,n}^{\{1\}}y_n - I_{n.n+1}\right], \quad (14)$$

де $I_{n-1,n} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} K_{n.n}df(\alpha)$; $I_{n-1}^{[1]} \int_{x_{n-1}}^{x_n} K_{n,n}^{[1]}df(\alpha)$.

У формулі (13) замінимо n на $n+1$, $n-1$ на n і підставимо вирази для $y_n^{[1]}$, $y_{n-1}^{[1]}$ у формулу (14). Зробивши необхідні перетворення, одержимо остаточну рекурентну формулу для квазідиференціального рівняння (1) :

$$\frac{1}{K_{n+1,n}} y_{n+1} + \left(S_n - \frac{K^{\{1\}}_{n+1,n}}{K_{n+1,n}} - \frac{K^{[1]}_{n,n-1}}{K_{n,n-1}} \right) y_n + \left(\frac{K^{\{1\}}_{n,n-1} K^{[1]}_{n,n-1}}{K_{n,n-1}} - K^{\{1\}[1]}_{n,n-1} \right) y_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{K_{n+1,n}} I_{n,n+1} + \left(S_n - \frac{K^{[1]}_{n,n-1}}{K_{n,n-1}} \right) I_{n-1,n} + I^{[1]}_{n-1,n} . \quad (15)$$

Якщо вихідне квазідиференціального рівняння (1) однорідне, то відповідна йому рекурентна формула має вигляд

$$\frac{1}{K_{n+1,n}} y_{n+1} + \left(S_n - \frac{K^{\{1\}}_{n+1,n}}{K_{n+1,n}} - \frac{K^{[1]}_{n,n-1}}{K_{n,n-1}} \right) y_n + \left(\frac{K^{\{1\}}_{n,n-1} K^{[1]}_{n,n-1}}{K_{n,n-1}} - K^{\{1\}[1]}_{n,n-1} \right) y_{n-1} = 0 . \quad (16)$$

Зауважимо, що формула (15) для рівняння (1) є не наближеною, а точною (еквівалентною), тобто довільний частинний розв'язок рівняння (1) в даній точці збігається з одержаним за формулою (15) і навпаки.

2. Покажемо, як еквівалентну рекурентну формулу (6) можна застосувати в якості наближеного методу розв'язання задач на власні значення, пов'язаних з диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами.

Приклад 1. Розглянемо задачу на власні значення

$$y'' + p(1 + \sin x) y = 0 , \quad (17)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 . \quad (18)$$

Рівнянню (17) відповідає така система :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(1+\sin x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} ,$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(1+\sin x) & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C(x) = \begin{pmatrix} c_{11} & x \\ -p(x - \cos x + 1) & c_{12} \end{pmatrix} .$$

Розіб'ємо відрізок $[0;\pi]$ на n рівних частин точками x_i;

$$0 \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n \equiv \pi .$$

Довжина одного відрізка (крок) дорівнює $h = \frac{\pi}{n}$. Апроксимуємо функцію $c_{21}(x)$ так [2]:

$$c^n_{21}(x) = c_{21}\left(k\frac{\pi}{n} \right) = c_{21}(kh), \qquad k = \overline{0, n-1};$$

$$c^n_{21}(x) = kh - \cos kh + 1.$$

Стрибок функції $c^n_{21}(x)$ в точці $x_k = kh$ визначається такою формулою:

$$M_k = \Delta c^n_{21}(x_k) = h - \cos(k+1)h + \cos kh .$$

Тоді

$$\Delta C^n(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -pM_k & 0 \end{pmatrix} .$$

Оскільки $\left[\Delta C^{n}\right]^{2} \equiv 0$, то виконується необхідна та достатня умова коректності відповідної системи [1], тому така апроксимація можлива.

Апроксимоване рівняння має вигляд

$$y_n'' + p\sum_{k=1}^{n} M_k \delta(x - x_k) y_n = 0 \ . \qquad (19)$$

Для знаходження власних значень задачі (9), (8) використаємо формулу (16).

Для рівняння (19) введемо квазіпохідну $y^{[1]} = y'$, тоді $y^{\{1\}} = -y'$. Очевидно, що функція Коші має вигляд

$$K(x,\alpha) = x - \alpha \ ,$$

а

$$K(x_{k+1}, x_k) = K(x_k, x_{k-1}) = h \ ,$$

$$K^{\{1\}}(x,\alpha) \equiv 1; \ K^{[1]}(x,\alpha) \equiv 1; \ K^{\{1\}[1]}(x,\alpha) \equiv 0;$$

Одержані вирази підставимо у рекурентну формулу (16) і, після відповідних спрощень, маємо таку еквівалентну рекурентну формулу:

$$y_{k+1} + (phM_k - 2)y_k + y_{k-1} = 0 \ . \qquad (20)$$

Використовуючи крайові умові (18) і триточкову формулу (20), можна знайти власні значення задачі (17), (18). Для цього покладемо, наприклад, $y_1 = 1$. Тоді знайдемо проміжок, на якому функція $y_n(p)$ змінює знак. Так ми одержимо межі, в яких знаходиться одне із власних значень. Тоді знайдемо власне значення із потрібною точністю, використовуючи метод поділу відрізка навпіл. Результати обчислень наведені в табл. 1, які порівнюються з відомими [3], [4].

Таблиця 1

Власні значення задачі (7), (8)

	Метод Вайнштейна	Метод Фікера	Метод Рітца	Авторський результат
p_1	0.54031883	0.54031789	0.54031885	0.540318877
p_2	-	-	-	2.37174805
p_3	5.4486360	5.4477473	5.4486362	5.4486358
p_4	-	-	-	9.762195318
p_5	15.312608	15.292913	15.312608	15.31260518

Задача (7), (8) має певний фізичний зміст. Це є рівняння поперечних коливань струни, кінці якої закріплені. Якщо ж на струні в деяких точках x_i зосереджені маси m_k, то рівняння (7) набуває такого вигляду:

$$y_n'' + p\left(1 + \sin x + \sum_{k=1}^{z} m_k \delta(x - x_k)\right) y_n = 0 \ . \qquad (21)$$

З крайовими умовами (18) внаслідок апроксимації такого рівняння ми одержимо

$$y_n'' + p\left(\sum_{k=1}^{n} M_k \delta(x - x_k) + \sum_{k=1}^{z} m_k \delta(x - x_k)\right) y_n = 0 \ . \qquad (22)$$

Зауваження.

Якщо в рівнянні (21) покласти, що всі маси дорівнюють нулю, то одержимо попередню задачу (17), (18). Отже, задача (17), (18) є частинним випадком задачі (21), (18).

Результати виконаних перетворень та обчислень наведені у табл. 2, де для конкретності покладемо $m_k = 1 \quad \forall k$.

Таблиця 2

Власні значення задачі (11), (8)

	z = 1	z = 2	z = 3	z = 0
p_1	0.39386644866	0.35234972369	0.31732211169	0.54031887
p_2	2.3717434602	1.3903411748	1.2905886220	2.37174605
p_3	4.0913851066	5.3581507327	2.6017420115	5.4486358
p_4	9.7621100014	7.5897020092	9.3589147693	9.762195318
p_5	12.031058709	9.4270212045	11.998860390	15.31260518

де p_i, $i = 1,...,5$ – власні значення; z – кількість точок зосереджених мас.

Приклад 2. У роботі [3] розглядається крайова задача

$$\left(\sqrt{1+x}\cdot y'\right)' + py = 0 \ , \tag{23}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{24}$$

для квазідиференціального рівняння (23) введемо квазіпохідну

$$y^{[1]} = \sqrt{1+x}\cdot y' ,$$

тоді

$$y^{\{1\}} = -\sqrt{1+x}\cdot y' .$$

Відповідна до рівняння (23) система має вигляд

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \\ -p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} .$$

Розіб'ємо відрізок [0; 1] на n рівних частин точками x_i

$$0 \equiv x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_{n-1} < x_n \equiv 1 \ .$$

На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ функцію $c_{12}(x) = \int\limits_0^x 1dt = x$ апроксимуємо так: $c_{12}^n(x) = x_k$. При цьому стрибок функції c_{12}^n в точці x_k такий:

$$M_k = \Delta c_{12}^n(x_k) = x_{k+1} - x_k = h \ .$$

Отже, апроксимоване рівняння має вигляд

$$\left(\sqrt{1+x}\cdot y'\right)' + p\sum_{k=1}^{n} M_k \delta(x - x_k) = 0 \ . \tag{25}$$

Будуємо функцію Коші для рівняння $\left(\sqrt{1+x}\cdot y'\right)' = 0$. Легко перевірити, що

$$K(x,\alpha) = 2\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+\alpha}\right) ,$$

$$K(x_{k+1}, x_k) = 2\left(\sqrt{1+x_{k+1}} + \sqrt{1+x_k}\right) ,$$
$$K(x_k, x_{k-1}) = 2\left(\sqrt{1+x_k} + \sqrt{1+x_{k-1}}\right) ,$$
$$K^{[1]}(x,\alpha) \equiv 1; \quad K^{\{1\}}(x,\alpha) \equiv 1; \quad K^{[1]\{1\}}(x,\alpha) \equiv 0 \ .$$

Підставимо знайдені дані у формулу (16), після спрощення одержимо рекурентну формулу для рівняння (25)

$$y_{k+1} + \left[2hp\left(\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_k}\right) - 1 - \frac{\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k} - \sqrt{1+x_{k-1}}} \right] y_k +$$
$$+ \frac{\sqrt{1+x_{k+1}} - \sqrt{1+x_k}}{\sqrt{1+x_k} - \sqrt{1+x_{k-1}}} y_{k-1} = 0 \ .$$

Аналогічно, як і в попередньому прикладі, дістанемо наближення мінімального власного значення задачі (23), (24)

$$p_1 = p_{min} = 11.898455775 \ .$$

Зауваження.

Для власного значення p_1 відомі [4] такі оцінки:

$$11.88655 \le p_1 \le 12.00455 \ ,$$

де нижня оцінка одержана методом функції Гріна, а верхня – методом Рітца.

1. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Львів, 1994. 2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. М., 1968. 3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. М., 1968. 4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957.

УДК 518.12

Л.І. Захаревич, Г.М. Коваль, Г.Г.Цегелик
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики
Львівський національний університет ім. І.Франка

МЕТОД ПАРАМЕТРІВ ВІДШУКАННЯ НИЖНЬОЇ МЕЖІ НУЛІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Розглядається використання методу параметрів для відшукання нижньої межі нулів алгебраїчних многочленів від двох дійсних змінних.

We consider the using of the method of parameters for finding the lower bound of zeros of the algebraic polinomials of two real variables.

У [1] запропонований універсальний метод локалізації за модулем нулів многочленів, степеневих рядів і рядів Лорана, який в літературі називається методом параметрів. За допомогою цього методу можна одержати як частковий випадок багато (якщо не всі!) відомих