вигляді матриці розміром 4×4, надходить неперервно на обробку у вигляді 16-ти розрядних десяткових чисел. Перший зліва розряд – ознака переповнення, два наступних – знак числа. Фактично, код відповідної ділянки зображення подається на обробку як умовне ціле число в модифікованому додатковому коді. Така розрядність чисел, що вводяться, забезпечує реалізацію алгоритму конвеєрного методу без переповнення, не зважаючи на те, що алгоритм має операції додавання, віднімання і ділення чисел з фіксованою комою. Так забезпечується послідовна обробка неперервного потоку інформації за допомогою розпаралелювання його.

При програмуванні алгоритму на ООС можна використати деякі стандартні блоки (для операцій “+”, “-“, “%”, арифметичних зсувів вправо, генератора констант), а також побудовані блоки визначення модуля числа, представленого в модифікованому додатковому коді, блок присвоєння результату одного з двох значень, залежно від виконання деякої умови [4].

1. Параллельная обработка информации: в 5-ти т. Параллельные методы и средства распознавания образов /Под ред. А. Н. Свенсона. Т.1. К., 1985. 2. Параллельная обработка информации: в 5-ти т. Вычислительные системы, структуры и среды для решения задач большой размерности /Под ред. В. В. Грицыка. Т.3. К., 1986. 3. Параллельная обработка информации: в 5-ти т. Высокопроизводительные системы параллельной обработки информации /Под ред В. В. Грицыка. Т.4. К., 1988. 4. Худий А.М. Структурний алгоритм розпізнавання образів// Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. 1999, № 364, с.333-340.

УДК 519.642

В.П. Данилович,Т.М. Ільницька
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики, кафедра будівельної механіки

ОДИН АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ В ПРОСТОРІ ОСНОВНИХ ФУНКЦІЙ

Запропонована ідея зв’язку інтерполяційних сплайнів із задачею Коші в просторі узагальнених функцій.

The idea of connection the spline interpolationg with Caushy problem in the space of generalised functions are proposed.

Нехай D – основний простір, тобто простір нескінченно диференційованих фінітних функцій зі збіжністю [1]. Збіжність в D визначається умовою рівномірної фінітності і збіжністю функцій разом зі всіма похідними.

Для позначення узагальнених функцій на просторі D узагальнених функцій будемо використовувати символічне позначення f(x) (замість (f, φ)). Таке позначення використовують під час моделювання таких ідеалізованих понять як щільність точкового заряду, миттєвий імпульс тощо.

Нехай на дійсній осі задано сітку вузлів

$$\{x_i\}_{-m}^{N+m} \quad , \quad x_0 = a, \quad x_N = b, \quad x_i \neq x_j ; \quad i \neq j \tag{1}$$

Нехай Lu(x) – лінійний диференціальний оператор порядку m зі сталими коефіцієнтами

$$Lu(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j D^j u(x)$$

Відомо [2], що кожний елемент простору L-сплайнів локально є розв'язком рівняння $L^* L\psi = 0$, де L* – формально спряжений оператор до L. Ці розв'язки у всіх внутрішніх вузлах розбиття зістиковані так, що $\psi \in C^{2m-z-1}[a,b]$, де $1 \le z \le m$, z – фіксоване додатне число.

Розглянемо частковий випадок.

Нехай $\psi(x)$ – сплайн степеня (m-1) дефекту 1 на сітці вузлів (1). Тоді на кожному підінтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн збігається з розв'язком граничної задачі [3]

$$\begin{aligned}
&\psi_1^{(m)}(x) = 0, \psi_2^{(m)}(x) = 0, \ldots, \psi_N^{(m)}(x) = 0;\\
&\psi_1(x_0) = 0,\ \psi_1'(x_0) = \psi_1''(x_0) = \ldots = \psi_1^{(m-2)}(x_0);\\
&\psi_2(x_1) = \psi_1(x_1), \psi_2'(x_1) = \psi_1'(x_1), \ldots, \psi_2^{(m-2)}(x_1) = \psi_1^{(m-2)}(x_1);\\
&\ldots\\
&\psi_N(x_{N-1}) = \psi_{N-1}(x_{N-1}), \psi_N'(x_{N-1}) = \psi_{N-1}'(x_{N-1}), \ldots, \psi_N^{(m-2)}(x_1) = \psi_{N-1}^{(m-2)}(x_1);\\
&\psi_N(x_N) = 0,\ \psi_N'(x_N) = \ldots = \psi_N^{(m-2)}(x_N) = 0;
\end{aligned}$$

Припустимо тепер, що $\psi^{(m-1)}(x_i) = \delta(x_i), i = 0, 1, \ldots, N-1, N$, де $\delta(x)$ – дельта функція Дірака, оскільки $\psi \in C^{2m-z-1}[a,b],\ z \le m+1$.

Тоді отримаємо послідовність граничних задач

$$\begin{aligned}
&\psi_1^{(m)}(x) = 0, \psi_2^{(m)}(x) = 0, \ldots, \psi_N^{(m)}(x) = 0;\\
&\psi_1(x_0) = 0,\ \psi_1'(x_0) = \psi_1''(x_0) = \ldots = \psi_1^{(m-2)}(x_0); \psi_1^{(m-1)}(x_0) = \delta(x_0);\\
&\psi_2(x_1) = \psi_1(x_1), \psi_2'(x_1) = \psi_1'(x_1), \ldots, \psi_2^{(m-2)}(x_1) = \psi_1^{(m-2)}(x_1);\\
&\psi_2^{(m-1)}(x_1) = \psi_1^{(m-1)}(x_1) = \delta(x_1);\\
&\ldots\\
&\psi_N(x_{N-1}) = \psi_{N-1}(x_{N-1}), \psi_N'(x_{N-1}) = \psi_{N-1}'(x_{N-1}), \ldots,\\
&\qquad \psi_N^{(m-2)}(x_{N-1}) = \psi_{N-1}^{(m-2)}(x_{N-1}); \psi_N^{(m-1)}(x_{N-1}) = \psi_{N-1}^{(m-1)}(x_{N-1}) = \delta(x_{N-1});\\
&\psi_N(x_N) = 0,\ \psi_N'(x_N) = \ldots = \psi_N^{(m-2)}(x_N) = 0, \psi_N^{(m-1)}(x_N) = \delta(x_N);
\end{aligned} \tag{2}$$

Якщо розглядати умову лише на одному з кінців розбиття, тобто не враховувати умови стикування, то отримаємо сукупність задач Коші для однорідного рівняння, для якої лише остання умова містить функцію Дірака δ(x) і визначає фундаментальний розв'язок задачі на кожному підінтервалі розбиття. Фундаментальний розв'язок цієї задачі є узагальненою функцією, яка в узагальненому сенсі задовольняє однорідне диференціальне рівняння. Відомо [4], що, якщо відомий фундаментальний розв'язок, то розв'язок кожної із задач (2) при довільних початкових даних можна подати в явному вигляді і тим самим гарантовано існування інтегральних узагальнених сплайнів.

Для побудови алгоритму обчислення розглянемо поділену різницю

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \int_{x_k}^{x_{k+m}} B_{m-1,k}(t) f^{(m)}(t) dt, \quad k=-m,\ldots,N \tag{3}$$

де $B_{m-1,k}(x)$ – В-сплайн.

Проінтегруємо (3) по частинах, отримаємо

$$\int_{x_k}^{x_{k+m}} B_{m-1,k}(t) f^{(m)}(t) dt = [B_{m-1,k}(t) f^{(m-1)}(t) - B'_{m-1,k}(t) f^{(m-2)}(t) + \ldots +$$

$$+ (-1)^m B^{(m-2)}_{m-1,k}(t) f'(t)]\Big|_{x_k}^{x_{k+m}} + (-1)^{m+1} \int_{x_k}^{x_{k+m}} B^{(m-1)}_{m-1,k}(t) f'(t) dt \tag{4}$$

Розглянемо,

$$\int_{x_k}^{x_{k+m}} B^{(m-1)}_{m-1,k}(t) f'(t) dt = m! \int_{x_k}^{x_{k+m}} \psi^{(m-1)}_{m-1,k}(t) f'(t) dt = m! \int_{x_k}^{x_{k+m}} \delta(t) f'(t) dt = m!\, f'(0).$$

Отже, запишемо (4)

$$\int_{x_k}^{x_{k+m}} B_{m-1,k}(t) f^{(m)}(t) dt = [B_{m-1,k}(t) f^{(m-1)}(t) - B'_{m-1,k}(t) f^{(m-2)}(t) + \ldots +$$

$$+ (-1)^m B^{(m-2)}_{m-1,k}(t) f'(t)]\Big|_{x_k}^{x_{k+m}} + (-1)^{m+1} m!\, f'(0) \tag{5}$$

Сплайн $B_{m-1,k}(x)$ та його похідні задовольняють умови (2).

Використовуючи формули (2) та (5), побудуємо алгоритм обчислення сплайнів та їх похідних.

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М., 1981. 2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 3. Данилович В.П. Об одном способе представления интерполяционных сплайнов // Вісник ЛПІ. 1986. № 202. С.33-35. 4. Нижник Л.П. Задача Коши. К., 1975.