УДК 512.552.1

Ю.П. Матурін
Львівський національний університет ім. І. Франка

ПРО I - РАДИКАЛИ

Розглядаються властивості I – радикалів. Одержано умови на кільце, які рівносильні умові напівтривіальності усіх I – радикалів.

The properties of I-radicals are considered. In the paper there are obtained necessary and sufficient conditions for a ring over which every I-radical is semi-trivial.

Всі кільця будемо вважати асоціативними з одиницею $1 \neq 0$, а модулі розглядаються тільки ліві унітарні. Нехай R - кільце.

Категорія лівих R - модулів позначається через $R - Mod$.

Нагадаємо, що напередрадикалом у категорії $R - Mod$ називається таке правило r, за яким кожному лівому R-модулю C ставиться у відповідність деякий підмодуль $r(C)$ так, що для довільного R - гомоморфізму $f : C \to D$ виконується співвідношення

$$f(r(C)) \subseteq r(D).$$

Якщо r_1, r_2 – напередрадикали, то вони визначають напередрадикали $r_1 r_2$ і $r_1 : r_2$ такими правилами:

$r_1 r_2(C) = r_1(r_2(C))$ для всякого $C \in R - Mod$;

$(r_1 : r_2)(C)/r_2(C/r_1(C))$ для всякого $C \in R - Mod$.

Напередрадикал називається ідемпотентним, якщо $rr = r$.

Напередрадикал r називається радикалом, якщо $r : r = r$.

З напередрадикалом r пов'язані два класи лівих R - модулів, а саме

$$T(r) = \{C \in R - Mod | r(C) = C\},$$
$$F(r) = \{C \in R - Mod | r(C) = 0\}.$$

Напередрадикал r називається тривіальним, якщо виконується одна з умов

1. $r(M) = M$ для всякого $M \in R - Mod$;
2. $r(M) = 0$ для всякого $M \in R - Mod$.

Будемо вважати, що напередрадикал r розщеплюється, якщо для всякого лівого R - модуля M $r(M)$ виділяється прямим доданком в M.

Клас R-модулів T називається радикальним, якщо він замкнений відносно гомоморфних образів, прямих сум і розширень.

Пропозиція 1 ([1]) Порівняння $r \to T(r)$; $T \to r$, $r(M) = \sum\{M' \in T | M' \subseteq M\}$ визначають бієктивну відповідність між ідемпотентними радикалами і радикальними класами категорії $R - Mod$.

Пропозиція 2 ([8]) Нехай I – лівий ідеал в R. Тоді $T(I)$ – радикальний клас в $R - Mod$.

Нехай I – лівий ідеал кільця R. Позначимо через r_I ідемпотентний радикал, який відповідає радикальному класові $T(I)$.

Означення 1 (О.Л.Горбачук). Ідемпотентний радикал r_I називається I - радикалом.

У праці [6] було показано, що $r_I = r_{IR}$ для всякого лівого ідеалу I кільця R.

Доведемо деякі допоміжні результати.

Лема 1. Нехай I – лівий ідеал в R. Тоді для всякого лівого R-модуля M

$$r_I(M) \subseteq IM .$$

Доведення. Нехай M – лівий R-модуль. Тоді $r_I(M) = Ir_I(M) \subseteq IM$.

Лема 2. Нехай I – лівий ідеал в R. Тоді $\{M \in R - Mod | IM = 0\} \subseteq F(r_I)$.

Доведення. Нехай K – лівий R-модуль, для якого $IK = 0$. Тоді за лемою 1 маємо, що $r_I(K) \subseteq IK = 0$.

Лема 3. Нехай I – лівий ідеал в R. Тоді $F(r_I) = \{M \in R - Mod | IM = 0\}$ в тому і тільки тому випадку, коли $r_I(M) = IM$ для кожного лівого R-модуля M .

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай $F(r_I) = \{M \in R - Mod | IM = 0\}$. Тоді за пропозицією 2.3.б.[5, с.16] для всякого лівого R-модуля M

$$r_I(M) = \cap\{M' \subseteq M | I(M/M') = 0\} = \cap\{M' \subseteq M | IM \subseteq M'\} = IM .$$

($\Leftarrow$) Це очевидно.

Означення 2. Підмножина S кільця R називається T-нільпотентною справа, якщо для всякої послідовності $a_1, a_2, ...$ в S існує таке n, що

$$a_1, a_2, ...a_n = 0 .$$

Пропозиція 3 ([2]) Нехай I – лівий ідеал в R. Тоді умови еквівалентні

(1) I T-нільпотентний справа;

(2) $IM \neq M$ для всякого ненульового лівого R-модуля M .

Лема 4. Нехай I – лівий ідеал кільця R. Для того, щоб $r_I = r_0$, необхідно і достатньо, щоб I був T-нільпотентним справа.

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай $r_I = r_0$. Тоді $T(r_I) = T(r_0) = \{0\}$. Далі використаємо пропозицію 3.

($\Leftarrow$) Викоритати пропозицію 3 і потім пропозицію 1.

Лема 5. Нехай I – лівий ідеал кільця R. Для того, щоб $r_I = r_R$, необхідно і достатньо, щоб $IR = R$.

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай $r_I = r_R$. Тоді $R \in T(r_R) = T(r_I)$, тобто $IR = R$.

($\Leftarrow$) Нехай $IR = R$. Оскільки $r_I = r_{IR}$, то $r_I = r_R$.

Теорема 1 ([6]). Для того, щоб в категорії $R - Mod$ було точно два I-радикали, необхідно і достатньо, щоб радикал Джекобсона $J(R)$ був T - нільпотентний справа, а кільце $R/J(R)$ – простим кільцем.

Доведення. Безпосередньо використати леми 4-5.

Умови теореми 1 не є ліво – право симетричними.

Приклад 1. Нехай F – поле, а $M_\omega(F)$ – множина всіх матриць зі зліченною кількістю рядків і стовпців, причому кожний рядок містить скінченну кількість ненульових елементів з F. Нехай A – підкільце в $M_{\omega}(F)$, яке породжене множиною N всіх строго нижніх трикутних матриць разом з одиничною матрицею. Добре відомо, що $N = J(A)$ і $A/J(A) \cong F$, де $J(A)$ T - нільпотентний справа, але не T - нільпотентний зліва.

Нехай I – власний ідеал в R і $\varphi : R \to R/I$ – природний кільцевий гомоморфізм. Якщо T - радикальний клас в $R - Mod$, то $T_{\varphi} = T \cap \{M \in R - Mod | IM = 0\}$ – радикальний клас в $R/I - Mod$.

Нехай $U \supseteq I$ – ідеал в R. Легко бачити, що $T_{\varphi}(U) = T(U) \cap \{M \in R - Mod | IM = 0\}$ – радикальний клас для U/I-радикалу в $R/I - Mod$.

Теорема 2. Нехай I і U – ідеал кільця R і $R \neq I \subseteq U$. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) $r_I = r_U$;

(2) U/I - T - нільпотентний справа ідеал кільця R/I;

(3) для всякої послідовності $a_1, a_2, \ldots$ в U існує n таке, що $a_1, a_2 \ldots a_n \in I$.

Доведення. (2) $\Leftrightarrow$ (3) Це очевидно.

(1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $r_I = r_U$.Оскільки $T(I) = T(U)$, то $T_{\varphi}(U) = T(I) \cap \{M \in R - Mod | IM = 0\}$. За лемою 2 маємо, що $T_{\varphi}(U) = \{0\}$. За лемою 4 тоді матимемо, що U/I-T- нільпотентний справа ідеал .

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай U/I-T - нільпотентний справа ідеал в R/I. Використавши лему 4, одержимо, що $T(U) \cap \{M \in R - Mod | IM = 0\} = \{0\}$. Нехай M – лівий R-модуль такий, що $UM = M$, $IM \neq M$. Тоді $0 \neq M/IM \in T(U) \cap \{M \in R - Mod | IM = 0\} = \{0\}$, тобто ми одержали протиріччя. Отже, $T(I) = T(U)$. За пропозицією 1 $r_I = r_U$.

Нехай $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$ – кільцевий розклад для R і r - ідемпотентний радикал в $R - Mod$. Розглянемо наступні класи:

$$T_i = \{M \in R - Mod | (R_1 + R_2 + \ldots + R_{i-1} + R_{i+1} + \ldots + R_n)M = 0,\ M \in T(r)\}, \text{ де } i \in \{1,2,\ldots n\}.$$

Зрозуміло, що $T_i(r)$ - радикальний клас деякого ідемпотентного радикалу в $R_i - Mod$.

Ідемпотентний радикал r_j називається j-проекцією r, якщо $T(r_j) = T_j(r)$. Очевидно, що для всякого $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ r_j розщеплюється, якщо r розщеплюється.

Лема 6. Нехай $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$ – кільцевий розклад для R і r-I-радикал в $R - Mod$, який визначається лівим ідеалом I кільця R. Тоді для кожного $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ r_j є $R_j I$-радикалом в $R_j - Mod$.

Доведення. Якщо $M \in T_j(r)$, то

$$R_j IM = (R_1 + \ldots R_{j-1} + R_{j+1} + \ldots + R_n)IM + R_j IM = RIM = IM = M .$$

Навпаки, якщо $R_j IM = M$, то очевидно, що $M \in T_j(r)$.

Лема 7. Нехай $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$ – кільцевий розклад для R і для кожного $j \in \{1,2,\ldots n\}$ I_j – лівий ідеал кільця R_j. Тоді $(r_{I_1 + \ldots + I_n})_j = r_{I_j}$, де $r_{I_1 + \ldots + I_n} - (I_1 + \ldots + I_n)$ – радикал в $R - Mod$ і r_{I_j} є I_j – радикал в $R_j - Mod$ $(j \in \{1,2,\ldots,n\})$.

Доведення. Нехай M – лівий R-модуль. Тоді

$$(I_1 + ... + I_n)M = M,\ (R_1 + ... + R_{j-1} + R_{j+1} + ... + R_n)M = 0 \Leftrightarrow I_j M = M,$$
$$(R_1 + ... + R_{j-1} + R_{j+1} + ... + R_n)M = 0.$$

Лема 8. Нехай $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ – кільцевий розклад для R. Для того щоб всі I-радикали розщеплювалися в $R - Mod$, необхідно і достатньо, щоб для довільного $j \in \{1,2,...,n\}$ всі I-радикали розщеплювалися в $R_j - Mod$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Припустимо, що всі I-радикали в $R - Mod$ розщеплюються. Нехай I_j – лівий ідеал в R_j і ρ_{I_j} - I_j-радикал в $R_j - Mod$. Зрозуміло, що $\rho_{I_j} = (r_{I_j})_j$, де ρ_{I_j} - I_j-радикал в $R - Mod$, то r_{I_j} розщеплюється. Тоді маємо, що його проекція ρ_{I_j} також розщеплюється.
($\Leftarrow$) Тепер припустимо, що для довільного $j \in \{1,2,...,n\}$ всі I_j-радикал в $R_j - Mod$ розщеплюються.

Нехай I – довільний лівий ідеал в R. Тоді

$$M = R_1M \oplus ... \oplus R_nM = (r_{R_1 J}(R_1M) \oplus H_1) \oplus ... \oplus (r_{R_n I}(R_nM) \oplus H_n) =$$
$$= (r_I(R_1M) \oplus H_1) \oplus ... \oplus (r_I(R_nM) \oplus H_n) = (r_I(R_1M) \oplus ... \oplus (r_I(R_nM)) \oplus (H_1 \oplus ... \oplus H_n)) =$$
$$= r_I(R_1M \oplus ... \oplus R_nM) \oplus (H_1 \oplus ... \oplus H_n) = r_I(M) \oplus (H_1 \oplus ... \oplus H_n),$$

де M – довільний лівий R-модуль, $r_{R_j I}$ - $R_j I$ –радикал в $R_j - Mod$ $(j \in \{12,...,n\})$ і r_I - I – радикал в $R - Mod$.

Теорема 3. Якщо всі I-радикали розщеплюються в $R - Mod$, то для кільця R існує деякий нерозкладний розклад

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n.$$

Доведення. Припустимо, що всі I-радикали в $R - Mod$ розщеплюються, а кільце R не має нерозкладного розкладу. Тоді існують деякі ненульові ідеали $R_1, R_2, R_1', R_2', ...$ такі, що

$$R = R_1 \oplus R_2,\ R_2 = R_1' \oplus R_2',\ R_2' = R_1'' \oplus R_2'', ...$$

Розглянемо ідеал $I = R_1 \oplus R_1' \oplus R_1'' \oplus ...$. Зрозуміло, що $I^2 = I$. Тепер розглянемо I-радикал r_I в $R - Mod$. За лемою 1 $r_I(R) \subseteq I$. Оскільки $I^2 = I$, то $I \subseteq r_I(R)$. Звідси маємо, що $r_I(R) = I$. Оскільки r_I розщеплюється, то $R = I \oplus H$ для деякого лівого ідеалу H кільця R. Тоді $R = H \oplus R_1 \oplus R_1' \oplus R_1'' \oplus ...(R_1 \neq 0, R_1' \neq 0, ...)$ – протиріччя.

Наслідок 1. Нехай R – кільце. Для того, щоб всі I-радикали розщеплювалися в $R - Mod$, необхідно і достатньо, щоб існував нерозкладений розклад кільця $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ і для всякого $j \in \{1,2,...,n\}$ всі I-радикали в $R_j - Mod$ розщеплювалися.

Доведення. Безпосередньо використати лему 8 і теорему 3.

Означення 3. Нехай r – ідемпотентний радикал в $R - Mod$. r називається напівтривіальним, якщо існує такий кільцевий розклад $R = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$, що для довільного $j \in \{1,2,...,n\}$ r_j – тривіальний ідемпотентний радикал в $R_j - Mod$.

Теорема 4. Нехай $R-$ кільце. Для того, щоб всі I-радикали в $R-Mod$ були напівтривіальні, необхідно і достатньо, щоб існував нерозкладний кільцевий розклад $R=R_1\oplus R_2\oplus\ldots\oplus R_n$ такий, що для кожного $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ всі I-радикали в R_j-Mod були тривіальні.

Доведення ($\Rightarrow$) Припустимо, що всі I-радикали в $R-Mod$ напівтривіальні. Тоді всі I-радикали в $R-Mod$ розщеплюються і за теоремою 3 R має нерозкладний кільцевий розклад

$$R=R_1\oplus R_2\oplus\ldots\oplus R_n. \tag{1}$$

Нехай S – лівий ідеал кільця R_i і ρ_S-S–радикал в R_i-Mod. За лемою 7 маємо, що $(r_S)_i=\rho_S$, де r_S-S–радикал в $R-Mod$. Оскільки r_S напівтривіальний, то існує такий кільцевий розклад

$$R=R_1'\oplus R_2'\oplus\ldots\oplus R_k', \tag{2}$$

що для всякого $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ кожна j - проекція r_S є тривіальним напередрадикалом. З нерозкладності кільцевого розкладу (1) матимемо, що знайдеться таке $h\in\{1,2,\ldots,k\}$, що

$$R_h'=R_i\oplus R_{q_1}\oplus\ldots\oplus R_{q_t}\text{, де }\{q_1,\ldots,q_t\}\subseteq\{1,\ldots,n\}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер клас

$$T_h'(r_S)=\{M\in R-Mod\,|\,r_S(M)=M,\ (R_1'+\ldots+R_{h-1}'+R_{h+1}'+\ldots+R_k')M=0\}.$$

Тоді $T_h'(r_S)$ – радикальний клас для h - проекції r_S в R_h-Mod.

З розкладу (2) маємо, що $T_h'(r_S)=\{0\}$ або

$$T_h'(r_S)=\{M\in R-Mod\,|\,(R_1'+\ldots+R_{h-1}'+R_{h+1}'+\ldots+R_k')M=0\}.$$

Розглянемо клас

$$T_i(r_S)=\{M\in R-Mod\,|\,r_S(M)=M,\ (R_1+\ldots+R_{i-1}+R_{i+1}+\ldots+R_n)M=0\}.$$

Тоді $T_i(r_S)$ – радикальний клас в R_i-Mod для i-проекції r_S. Але i-проекція r_S – це ρ_S.

З (3) маємо, що $T_i(r_S)=\{M\in T_h'(r_S)\,|\,(R_{q_1}+\ldots+R_{q_t})M=0\}$.

З (4) випливає, що $T_i(r_S)=\{0\}$ або

$$T_i(r_S)=\{M\in R-Mod\,|\,(R_1+\ldots+R_{i-1}+R_{i+1}+\ldots+R_n)M=0\}.$$

Таким чином, маємо, що ρ_S – тривіальний напередрадикал.

($\Leftarrow$) Це зрозуміло.

Лема 9. Нехай I – ідемпотентний ідеал кільця R. Тоді

$$\forall M\in R-Mod: r_I(M)=IM.$$

Доведення. Нехай $S: M\mapsto IM\,(M\in R-Mod)$. Тоді S – ідемпотентний радикал в $R-Mod$. Зрозуміло, що $T(s)=T(r_I)$. За пропозицією 1 $S=r_I$.

Теорема 5. Нехай $r-$ ідемпотентний радикал в $R-Mod$. Тоді $F(r)$ є радикальним класом в тому і тільки в тому випадку, коли $r=r_I$ для деякого ідемпотентного ідеалу I.

Доведення. ($\Rightarrow$) За пропозицією (2.19) [3, с.92] існує ідемпотентний ідеал I кільця R такий, що

$$\forall M\in R-Mod: M\in F(r)\Leftrightarrow IM=0.$$

Нехай K – лівий R-модуль. Якщо $IK = K$, то $Hom_R(K, M) = 0$ для всіх $M \in F(r)$. Звідси $K \in T(r)$. Якщо $IK \neq K$, то $Hom_R(K, K/IK) \neq 0$. Оскільки $I(K/IK) = 0$, то $K/IK \in F(r)$. Але $Hom_R(K, K/IK) \neq 0$. Отже, $K \notin T(r)$.

($\Leftarrow$) Це зрозуміло.

Нехай $Ir(l, R)$ – множина усіх I-радикалів в $R - Mod$ і $CI(R)$ – множина всіх центральних ідемпотентів кільця R.

Теорема 6. Нехай R – кільце. Тоді наступні умови еквівалентні

(1) $\forall r \in Ir(l, R) \exists s \in Ir(l, R) \forall M \in R - Mod : M = r(M) \oplus s(M)$;

(2) $\forall r \in Ir(l, R) \exists e \in CI(l, R) \forall M \in R - Mod : r(M) = e(M)$;

(3) Всі I-радикали в $R - Mod$ напівтривіальні.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай виконується умова (1). Розглянемо довільний лівий ідеал I кільця R. Тоді існує лівий ідеал S такий, що

$$\forall M \in R - Mod : M = r_I(M) \oplus r_s(M).$$

Звідси $F(r_I) = T(r_s)$. За теоремою 5 $r_I = r_H$ для деякого ідемпотентного ідеалу H кільця R. Оскільки $R = r_I(R) \oplus r_s(R)$, то ми маємо, що $r_I(R) = eR$ для деякого центрального ідемпотента є кільце R. За лемою 9 маємо, що $eR = r_I(R) = r_H(R) = H \cdot R = H$. Звідси $r_I = r_{eR}$. Використавши знову лему 9, одержимо

$$\forall M \in R - Mod : r_I(M) = r_{eR}(M) = eRM = eM.$$

(2)$\Rightarrow$(3). Нехай виконується умова (2) і I – лівий ідеал кільця R. Тоді

$$\exists e \in CI(R) \forall M \in R - Mod : r_I(M) = eM.$$

Якщо $eR = R$, або $eR = 0$, то r_I тривіальний.

Припустимо, що $0 \neq eR \neq R$. Тоді ми маємо, що $R = R_1 \oplus R_2$, де $R_1 = \mathrm{Re}$, $R_2 = R(1 - e)$.

Зрозуміло, що $(r_I)_1$ і $(r_I)_2$ – тривіальні напередрадикали.

(3)$\Rightarrow$(1) Припустимо, що виконується умова (3). Нехай I – лівий ідеал кільця R. Тоді існує такий кільцевий розклад $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$, що для всякого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(r_I)_i$ – тривіальний напередрадикал. Тоді

$$\begin{aligned}
&\exists \pi \in S_n \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\} \forall M \in R - Mod : r_I(R_1 M \oplus R_2 M \oplus \ldots \oplus R_n M) = \\
&= r_I(R_1 M) \oplus r_I(R_2 M) \oplus \ldots \oplus r_I(R_n M) = (r_I)_1(R_1 M) \oplus (r_I)_2(R_2 M) \oplus \ldots \oplus (r_I)_n(R_n M) = \\
&= R_{\pi(1)} M \oplus R_{\pi(2)} M \oplus \ldots \oplus R_{\pi(k)} M = \left(R_{\pi(1)} \oplus R_{\pi(2)} \oplus \ldots \oplus R_{\pi(k)}\right) M.
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що

$$\forall M \in R - Mod : M = r_I(M) \oplus r_s(M), \text{ де } S = R_{\pi(k+1)} \oplus \ldots \oplus R_{\pi(n)}.$$

Наслідок 2. Нехай R –кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:

(1) $\forall r \in Ir(l, R) \exists s \in Ir(l, R) \forall M \in R - Mod : M = r(M) \oplus s(M)$;

(2) $\forall r \in Ir(l, R) \exists e \in CI(R) \forall M \in R - Mod : r(M) = eM$;

(3) всі I-радикали в $R - Mod$ напівтривіальні;

(4) існує кільцевий розклад

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$$

такий, що $J(R_i)$ T – нільпотентний справа і $R_i / J(R_i)$ – просте кільце для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Це випливає з теореми 6.
(3) $\Leftrightarrow$ (4). Це випливає з теорем 1, 4.

Означення 4. Нехай R – кільце. R називається досконалим зліва, якщо $R/J(R)$ напівпросте (тобто $soc_l(R/J(R) = R/J(R))$ і $J(R)$ T – нільпотентний справа.

Означення 5. Нехай R – комутативне кільце. R називається досконалим, якщо R досконале зліва.

Наслідок 3. Нехай R – комутативне кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:

(1) $\forall r \in Ir(l,R) \exists s \in Ir(l,R) \forall M \in R-Mod : M = r(M) \oplus s(M)$;

(2) $\forall r \in Ir(l,R) \exists e \in CI(R) \forall M \in R-Mod : r(M) = eM$;

(3) всі I -радикали в $R-Mod$ напівтривіальні;

(4) R – досконале кільце.

Доведення. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Це зрозуміло.
(3) $\Leftrightarrow$ (4). Це випливає з (27.6), (28.11) [4] і наслідку 2.

Лема 10. **Нехай R –кільце і I , S – ліві ідеали в R . Якщо $r_I \subseteq r_S$, то $r_{I+S} \subseteq r_S$.**

Доведення. Зрозуміло, що $r_S \subseteq r_{I+S}$. Нехай M – лівий R модуль такий, що $M \in T(r_{I+S})$. Тоді $I(M/SM) = (IM + SM)/SM = M/SM$. Звідки $M/SM \in T(r_I)$. Оскільки $T(r_I) \subseteq T(r_S)$, то маємо, що $M/SM \in T(r_S)$. Але $S(M/SM) = 0$. Звідси $M/SM \in F(r_S)$. Тоді $M/SM \in T(r_S) \cap F(r_S) = \{0\}$. Отже, $M = SM$. Маємо, що $M \in T(r_S)$. Звідси $T(r_{I+S}) \subseteq T(r_S)$, тобто $r_{I+S} \subseteq r_S$.

Теорема 7. Нехай R –кільце . Для того, щоб $CardIr(l,R) = 3$, необхідно і достатньо, щоб R містило єдиний максимальний ідеал m кільця R такий, що m не є T – нільпотентним справа і $\forall S \in \{A | A - \text{ідеал в } R\}$: $S \subseteq m \Rightarrow$ (S T – нільпотентний справа, або m/S T – нільпотентний справа).

Доведення. ($\Rightarrow$). Нехай $CardIr(l,R) = 3$. Тоді існує такий ідеал I кільця R, що $r_I \neq r_0$ і $r_I \neq r_R$. Зрозуміло, що існує максимальний ідеал m в R такий, що $I \subseteq m$. Очевидно, що $r_0 \subseteq r_I \subseteq r_m \subseteq r_R$. Звідси $r_m \neq r_0$. Оскільки $r_m \neq r_R$, $r_m \neq r_0$, то $r_m = r_I$. Отже, $Ir(l,R) = \{r_0, r_m, r_R\}$. Нехай B – максимальний ідеал кільця R такий, що $B \neq m$. За лемою 10 $r_m = r_{m+B}$, бо $r_B \neq r_R$. Звідси, враховуючи $m + B = R$, одержимо, що $r_m = r_R$ – протиріччя. Отже, m – єдиний максимальний ідеал кільця R. Тепер використаємо теорему 2.
($\Leftarrow$). Легко бачити, що $r_m \neq r_R$. Тепер використаємо теорему 2.

Приклад 2. Нехай *R*=R[[*X*]]. Легко бачити, що $Ir(l,R) = \{r_0, r_{J(R)}, r_R\}$.

Теорема 8. Нехай R – кільце. Якщо R досконале зліва, то $CardIr(l,R) = 3$.

Доведення. Нехай R – досконале зліва кільце. Припустимо, що $CardIr(l,R) = 3$. За теоремою 7 існує єдиний максимальний ідеал m кільця R. Легко бачити, що тоді $J(R) = m$. Оскільки R – досконале зліва, то $J(R)$ T-нільпотентний справа. Тоді m T-нільпотентний справа. Але за теоремою 7 m не є T-нільпотентним справа ідеалом. Одержане протиріччя доводить теорему.

Приклад 3. Нехай $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}$, $A=soc({}_R R)$, $B=soc(R_R)$. Легко бачити, що $Ir(l,R)=\{r_0, r_A, r_B, r_R\}$ і

$$r_R$$

$$r_B \qquad\qquad\qquad\qquad r_A$$

$$r_0$$

Автор висловлює щиру подяку О.Л. Горбачуку за керівництво роботою.

1. Stenström B. Rings of quotients. Berlin. Springer Verlag. 1975. 309 p. 2. Каш Ф. Модули и кольца. М. Мир. 1981. 369 с. 3. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. М. Наука. 1969. 152 с. 4. Anderson F., Fuller K. Rings and categories of modules. Berlin. Springer Verlag. 1974. 339 p. 5. Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв. Штинца. 1983. 154 с. 6. Горбачук Е.Л., Комарницкий Н.Я. I – радикалы и их свойства. // Укр. матем. журн. 1978. Т.30. №2. С.212-217. 7. Golan J.S. Localization of noncommutative rings. New York. Marcell Dekker. 1975. 346 p. 8. Горбачук Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. // Матем. исслед. 1972. Т.7. №4. Кишинёв. Штинца. С.44-59.