$$\exists C_{\theta 1} > 0: \ \left\| \mathbf{q}^{m+1} - \mathbf{q}^{m} \right\|_{L^2(0,T;V_\theta)} < C_{\theta 1} \left\| \mathbf{q}^{m} - \mathbf{q}^{m-1} \right\|_{L^2(0,T;V_\theta)} .$$

Нехай мають місце співвідношення

$$h_\theta(\sigma) = \alpha_h\, h_\theta^0(\sigma)\,, \quad \mathbf{V} = \alpha_V \mathbf{V}_0\,, \quad 0 \le \max(\alpha_h\,,\ \alpha_V) \le \alpha\,, \quad C_{\theta 1} = C_{h1}\,\alpha_h + C_{V1}\,\alpha_V$$
$$(C_{h1}\,,\ C_{V1} > 0)\,.$$

Тоді при $f < a_1 / C_{u1}$ і $\alpha < \left(C_{h1} + C_{V1}\right)^{-1}$ альтернативний алгоритм збігається зі швидкістю геометричної прогресії у відповідних нормах. Якщо через $C_{u\,2}$, a_2, $C_{\theta 2} = C_{h\,2}\,\alpha_h + C_{V\,2}\,\alpha_V$ позначити константи, що відповідають конструктивному алгоритму, то при $f < \min\{a_1 / C_{u1}\,,\ a_2 / C_{u\,2}\}$ та $\alpha < \min\left\{\left(C_{h1} + C_{V1}\right)^{-1},\ \left(C_{h\,2} + C_{V\,2}\right)^{-1}\right\}$ отримаємо, що обидва алгоритми збігаються зі швидкістю геометричної прогресії у відповідних нормах. Якщо ж виконується нерівність

$$\alpha < \min\left\{\left(C_h + C_V\right)^{-1},\ \left(C_{h1} + C_{V1}\right)^{-1},\ \left(C_{h\,2} + C_{V\,2}\right)^{-1}\right\},$$

де C_h, C_V – відповідні константи у схемі доведення існування розв’язку [1], то обидва алгоритми збігаються з вищезгаданою швидкістю до єдиного розв’язку задачі.

1. Скородинський І.С., Лазько В.А. Квазістатична термофрикційна задача при наявності узагальненого лінійно-дисипативного механізму міжфазного проковзування // Вісн. ДУ “Львів. політехніка”. 1996. № 299. С. 144–154. 2. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М., 1989. 3. Duvaut G. Free Boundary Problem Connected with Thermoelasticity and Unilateral Contact // Free Boundary Probl. Semin. (Pavia, Sept. – Oct., 1979): Proc. Roma. 1980. Vol. 2. P. 217–236. 4. Скородинський І.С. Ітераційний алгоритм розв’язування квазістатичної термоконтактної задачі з ускладненими умовами міжфазного проковзування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1999. 42. №1. С. 75–81. 5. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. 44. № 1. С. 122–129. 6. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М., 1979. 7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.

УДК 517.946+511.37

В.С. Ільків, Я.М. Пелех, Б.О. Салига
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

НЕЛОКАЛЬНА ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається двоточкова нелокальна за часовою змінною крайова задача для безтипної нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними

за часом коефіцієнтами в області, яка є декартовим добутком часового відрізка і багатовимірного просторового тора. Досліджуються умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в шкалі гільбертових просторів періодичних за просторовими змінними функцій. Умови існування пов'язані із проблемою малих знаменників. Оцінки знизу малих знаменників одержані за допомогою метричної теорії діофантових наближень.

We consider time nonlocal two-point boudary value problem for general linear partial systems with variable coefficients in cartesian product of time interval and space multidimensional torus. Existence and uniqueness conditions for solution of this problem in hilbert spaces scale of space periodic functions are investigated. Existence conditions are connected with the problem of small denominators. The estimates for small denominators which appear by using the metrical theorie methods of diophantine approximations are obtained.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку $u = u(t,x)$ системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u \equiv \sum_{|s|\le n} A_s(t) D_1^{s_1} \dots D_p^{s_p} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

який задовольняє двоточкові крайові нелокальні умови

$$l_j u \equiv \nu \left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

де ν, $\mu \in \mathbf{C}$, T>0 - параметри, $s = (s_0, s_1, ..., s_p)$, $|s| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$, $D = (D_1, ..., D_p)$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$ $(j = \overline{1,p})$. Вважаємо, що змінна $t \in [0,T]$, а змінна $x = (x_1, ..., x_p)$ належить p-вимірному тору, тобто припускається періодичність за змінною x. Матриці $A_s(t)$ є квадратними розміру m, їх елементи є неперервними за змінною t на відрізку $[0,T]$, $A_{n,0,...,0} = I$ (I – одинична матриця).

Використовуємо такі простори функцій: $\mathbf{H}_q$ і $\mathbf{E}_q$ ($q \in \mathbf{R}$) – гільбертові простори функцій, які отримані внаслідок поповнення множини тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \psi(k) e^{ikx}$ за нормами

$$\|\varphi\|_q^2 = (2\pi)^p \sum_{k\in\mathbf{Z}^p} \tilde{k}^{2q} |\psi(k)|^2 \qquad \text{і} \qquad \|\varphi\|_{\mathbf{E}_q}^2 = (2\pi)^p \sum_{k\in\mathbf{Z}^p} e^{2q\tilde{k}} |\psi(k)|^2,$$

де $k = (k_1, ..., k_p)$, $kx = k_1x_1 + \dots + k_px_p$, $\tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$;

$\mathbf{H}_q^n$ ($q \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) - гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що похідна $\partial^j u/\partial t^j$ належить простору $\mathbf{H}_{q-j}$ при $t \in [0,T]$ і $j = \overline{0,n}$. Норма в просторі $\mathbf{H}_q^n$ визначається за формулою

$$\|u\|_{q,n}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=0}^n \left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{q-j}^2 dt;$$

$\bar{\mathbf{H}}_q$, $\bar{\mathbf{E}}_q$, $\bar{\mathbf{H}}_q^n$ – простори вектор-функцій, елементи яких належать відповідно просторам $\mathbf{H}_q$, $\mathbf{E}_q$, $\mathbf{H}_q^n$; норми в цих просторах мають таке ж позначення, як і у скалярному випадку; наприклад, норма в просторі $\bar{\mathbf{H}}_q$ має такий вигляд; $\|\varphi\|_q^2 = \|\varphi_1\|_q^2 + \cdots + \|\varphi_l\|_q^2$ при $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1, ..., \varphi_l)$.

Введемо псевдодиференціальні оператори (ПДО) $F(D)$ [1], що діють за просторовими змінними $x_1, \ldots, x_p$ і визначаються за такою формулою:

$$F(D)\varphi(x) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}^p} F(k)\psi(k)e^{ikx}, \qquad \varphi(x) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}^p} \psi(k)e^{ikx},$$

на функціях $\varphi(x) \in \mathbf{H}_q$ чи $\varphi(x) \in \mathbf{E}_q$, де $\{F(k)\}_{k\in\mathbf{Z}^p}$ – деяка послідовність комплексних чисел. Навпаки, кожному такому оператору відповідає певна комплекснозначна послідовність, тобто існує бієктивна відповідність [2]. Це дозволяє перенести на оператори арифметичні операції і порівняння, утворювати з них п.д.о.-матриці тощо.

Якщо $F(D)$ – ПДО-матриця з елементами $F_{ij}(D)$, то $F^*(D)$ – ермітовоспряжена матриця до матриці $F(D)$ з елементами $\overline{F_{ji}(D)} = \left(F^*(D)\right)_{ij}$, $\sum\limits_{i,j}\left|F_{ij}(D)\right|^2 = \mathrm{tr}\left[F^*(D)F(D)\right]$ – квадрат "норми" матриці $F(D)$, де $|\cdot|$ – абсолютне значення, tr – слід матриці.

Послідовності $\tilde{k}$ поставимо у відповідність оператор $\tilde{D}$, тоді маємо рівності для норм $\|u\|_{q,n}^2 = \int_0^T \sum\nolimits_{j=0}^n \left\|\tilde{D}^{q-j}\partial^j u/\partial t^j\right\|_0^2 dt\,/\,T$, $\|\varphi\|_q^2 = \left\|\tilde{D}^q\varphi\right\|_0^2$, $\|\varphi\|_{\mathbf{E}_q}^2 = \left\|e^{q\tilde{D}}\varphi\right\|_0^2$. Очевидно, що оператор $\tilde{D}$ переводить простір $\mathbf{H}_q$ в простір $\mathbf{H}_{q-1}$ і $\mathbf{H}_q^n$ в $\mathbf{H}_{q-1}^n$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо в просторах $\bar{\mathbf{H}}_q^n$ припускаючи, що праві частини $\varphi(x)$ належать просторам $\bar{\mathbf{H}}_{q_1}$ чи $\bar{\mathbf{E}}_{q_1}$.

Для сталих коефіцієнтів задачу (1), (2) розглядали в роботі [3] в шкалах соболєвських просторів $\bar{\mathbf{H}}_q^n$, $\bar{\mathbf{H}}_q$. Розв'язність задачі доведена на основі метричного підходу [4, 5], який використовується і у випадку змінних коефіцієнтів [6]. Позначимо

$$v = \mathrm{col}(v_0, v_1, ..., v_{n-1}), \quad v_j = \tilde{D}^{n-j}\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \ \ j = \overline{0, n-1}. \tag{3}$$

Тоді для розв'язку $u(t,x) \in \bar{\mathbf{H}}_q^n$ задачі (1), (2) маємо

$$\|u\|_{q,n}^2 = \int_0^T \left(\|v\|_{q-n}^2 + \left\| \sum_{s_0=0}^{n-1} \tilde{D}^{s_0-n} \sum_{|s|\le n} A_s(t) D_1^{s_1} \ldots D_p^{s_p} v_{s_0} \right\|_{q-n}^2 \right) \frac{dt}{T} \le C_1 \|v\|_{q-n,0}^2, \tag{4}$$

де $C_1 > 0$ - деяка стала, що характеризує значення коефіцієнтів $A_s(t)$. Вектор (3) будемо шукати як розв'язок такої нелокальної крайової задачі для системи першого порядку:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tilde{D}l\left(t, \frac{D}{\tilde{D}}, \frac{I}{\tilde{D}}\right)v, \tag{5}$$

$$\nu v(0,x)-\mu v(T,x)=Z\varphi\,, \tag{6}$$

де $\varphi=\mathrm{col}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$.Матриця $l(t,\xi)$ системи (5) є блочною матрицею $\left(l_{ij}(t,\xi)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$. Кожний блок матриці є квадратним блоком розміру m. Ненульові блоки розміщені на першій надголовній діагоналі і є одиничними матрицями та в останньому рядку і мають вигляд

$$l_{nj}(t,\xi)=-\sum_{|s|\le n-j+s_0+1}A_{j-1,s_1,\dots,s_p}(t)\,\xi_1^{s_1}\dots\xi_p^{s_p}\,\xi_{p+1}^{n-j-|s|+s_0+1}\,,\quad j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Матриця $l(t,\xi)$ визначена і неперервна на компакті

$$K=\left\{(t,\xi):t\in[0,T],\xi\in\mathbf{R}^{p+1},\xi_{p+1}\ge 0,\xi_1^2+\cdots\xi_{p+1}^2=1\right\},$$

в якому будемо розглядати змінні t і ξ. Для доведення існування і побудови розв'язку задачі (1), (2) в просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n$ достатньо встановити це для задачі (5), (6) в просторі $\bar{\mathbf{H}}_{q-n}^0$ та використати формули (3) і (4).

Нехай $E(t,\xi)$ – фундаментальна матриця системи $dE/dt=\xi_{p+1}^{-1}l(t,\xi)E$. Припускаємо, що в деякій точці $t=t(\xi)\in[0,T]$ вона нормована одиничною матрицею, тобто $E(t(\xi),\xi)=I$.

Неважко встановити, що єдиність розв'язку задачі (1), (2) можлива тоді і тільки тоді, коли число ν при $t(\xi)=0$ не є власним значенням матриці $\mu E\left(T,k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)$ для кожного вектора $k\in\mathbf{Z}^p$. За цих умов формальний розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$v(t,x)=E\left(t,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)\left(\nu E\left(0,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)-\mu E\left(T,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)\right)^{-1}Z\varphi(x)\,. \tag{8}$$

Оцінимо норму $\|v\|_{q-n,0}^2$ розв'язку (8): $\|v\|_{q-n,0}^2\le\left\|\sqrt{\int_0^T F(t)dt/T\cdot F_1}\,Z\varphi\right\|_{q-n,0}^2$, де

$$F(t)\equiv F\left(t,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)=\mathrm{tr}\left[E^*\left(t,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)E\left(t,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)\right],\qquad F_1=\mathrm{tr}\left[\left(F_2^*\right)^{-1}\left(F_2\right)^{-1}\right]$$

і $F_2=\nu E\left(0,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)-\mu E\left(T,\frac{D}{\tilde{D}},\frac{I}{\tilde{D}}\right)$, причому [7] $F_1\le C_2\max\left(F(0),F(T)\right)^{nm-1}\left|\det F_2\right|^{-2}$, а $C_2=\max\left(|\,\nu\,|+|\,\mu\,|\right)^{nm-1}$. Тоді маємо нерівність

$$\|v\|_{q-n,0}^2\le C_2\left\|\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt\cdot\max\left(F(0),F(T)\right)^{nm-1}}\left|\det F_2\right|^{-1}Z\varphi\right\|_{q-n,0}^2. \tag{9}$$

Нехай $2\Lambda(t,\xi)$ і $2\lambda(t,\xi)$ відповідно максимальне і мінімальне власні числа матриці $l^*(t,\xi)+l(t,\xi)$, $\Lambda(\xi)=\max\limits_{t\in[0,T]}\Lambda(t,\xi)$, $\lambda(\xi)=\max\limits_{t\in[0,T]}\lambda(t,\xi)$.

Теорема 1. *Для оператора $F(t)$ справджуються такі оцінки:*

$$F(0)\le nme^{2\tilde{D}f_0\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)}, \tag{10}$$

$$F(T) \le nme^{2\tilde{D}f_T\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt \le 4nme^{2\tilde{D}f\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)}, \tag{12}$$

де $f(\xi)=\max\left(0,-t(\xi)\lambda(\xi),(T-t(\xi))\Lambda(\xi)\right)$, $f_0(\xi)=\int_{t(\xi)}^0\lambda(\tau,\xi)d\tau$, $f_T(\xi)=\int_{t(\xi)}^T\Lambda(\tau,\xi)d\tau$.

Доведення. Згідно з (5), похідна $F'(t)$ справджує співвідношення

$$F'(t)=\tilde{D}\,\mathrm{tr}\left[E^*\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\left(l^*\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)+l\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\right)E\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\right].$$

Оскільки $2\lambda(t,\xi)\le l^*(t,\xi)+l(t,\xi)\le 2\Lambda(t,\xi)$, то для функції $F(t)$ справедливі такі нерівності: $2\tilde{D}\lambda\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)F(t)\le F'(t)\le 2\tilde{D}\Lambda\left(t,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)F(t)$ і виконується умова нормування $F\left(t\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\right)=nm$. Тоді для довільного $k\in\mathbf{Z}^p$ при $t\ge t\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)$ отримаємо

$$F_k(t)\equiv F\left(t,\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\le nm\exp\left(2\tilde{k}\int_{t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}^{t}\Lambda\left(\tau,\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)d\tau\right)\le nm\exp\left(2\tilde{k}\Lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\left(t-t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right)$$

та нерівність (11) і при $t<t\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)$

$$F\left(t,\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\le nm\exp\left(2\tilde{k}\int_{t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}^{t}\lambda\left(\tau,\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)d\tau\right)\le nm\exp\left(2\tilde{k}\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\left(t-t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right),$$

що дає нерівність (10). Отже,

$$\frac{1}{T}\int_0^T F\left(t,\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)dt\le$$

$$\le\frac{nm}{T}\int_0^{t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}e^{2\tilde{k}\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\left(t-t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)}dt+\frac{nm}{T}\int_{t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}^{T}e^{2\tilde{k}\Lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\left(t-t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)}dt=I_1(k)+I_2(k). \tag{13}$$

Нехай $2\tilde{k}\left|\lambda\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)\right|T\le 1/2$, тоді $I_1(k)<nm\int_0^{t\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)}e^{1/2}dt/T<2nm$. Аналогічно при $2\tilde{k}\left|\Lambda\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)\right|T\le 1/2$ інтеграл $I_2(k)<2nm$.

Тепер нехай $2\tilde{k}\left|\lambda\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)\right|T>1/2$, тоді виконується нерівність

$$I_1(k)=\left.\frac{nm\exp\left(-2\tilde{k}\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\left(t-t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)}{2\tilde{k}T\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}\right|_0^{t\left(\frac{k}{\tilde{k}},\frac{1}{\tilde{k}}\right)}=$$

$$= \frac{nm}{T} \frac{\left|1 - \exp\left(-2\tilde{k}\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right) t\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right|}{2\tilde{k}\left|\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right|} \le 2nm \exp\left(2\tilde{k}t\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right) \max\left(0, -\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right),$$

а також

$$I_2(k) \le 2nm \exp\left(2\tilde{k}\left(T - t\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right) \max\left(0, \Lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right)$$

за умови $2\tilde{k}\left|\Lambda\left(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k}\right)\right| T > 1/2$.

Звідси випливає, що для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$ справджуються оцінки

$$I_1(k) \le 2nm \exp\left(2\tilde{k}t\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right) \max\left(0, -\lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right), \tag{14}$$

$$I_2(k) \le 2nm \exp\left(2\tilde{k}\left(T - t\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right) \max\left(0, \Lambda\left(\frac{k}{\tilde{k}}, \frac{1}{\tilde{k}}\right)\right)\right). \tag{15}$$

З нерівностей (13)-(15) випливає нерівність (12). Теорема доведена.

Оцінимо тепер визначник в формулі (9). Параметри ν і μ, від яких залежить визначник, впливають не тільки на єдиність, але і на існування розв'язку задачі (1), (2) в просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n$. Вибором параметрів можна зробити визначник як завгодно малим для безмежної кількості векторів $k \in \mathbf{Z}^p$. Виникає проблема малих знаменників, для розв'язання якої природним є метричний підхід [8-13]. Будемо доводити, що в деякій області параметрів, яка має малу міру, досліджувані знаменники можуть бути як завгодно малими, а поза цією областю мають шукану оцінку знизу (в нашому випадку – степеневу).

Нехай $(\nu, \mu) \in B \times B$, де B – одиничний круг з центром в початку координат комплексної площини.

Теорема 2. *Для довільного* $\varepsilon > 0$ *і параметрів* $(\nu, \mu) \in (B \times B) \setminus B_\varepsilon$, *де міра множини* B_ε *менше* ε, *справджується оцінка*

$$|\det F_2| \ge \varepsilon^{nm/2} C_3(r) \tilde{D}^r \max\left(e^{\tilde{D}f_1\left(0, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)}, e^{\tilde{D}f_1\left(T, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)}\right), \tag{16}$$

де $f_1(t, \xi) = \int_{t(\xi)}^{t} \mathrm{tr}[\mathrm{Re}\left(l(\tau, \xi)\right)] d\tau$, $C_3(r) = \left(2\pi^2 nm \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} \tilde{k}^{2r/nm}\right)^{-nm/2}$, $r < -pnm/2$, $\mathrm{Re}[\cdot]$ - *позначає дійсну частину.*

Доведення. Оскільки матриці $E\left(0, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)$ і $E\left(T, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)$ - невироджені, то

$$R(D) = \left|\det E\left(0, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right| \left|\det\left(\nu - \mu E^{-1}\left(0, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right) E\left(T, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\det E\left(T, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right| \left|\det\left(\mu - \nu E^{-1}\left(T, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right) E\left(0, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right)\right|, \tag{17}$$

За формулою Якобі

$$\left|\det E\left(t, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right| = \exp\left(\tilde{D}f_1\left(t, D/\tilde{D}, I/\tilde{D}\right)\right). \tag{18}$$

Далі використовуємо рівності

$$\left|\det\left(\nu-\mu E^{-1}\left(0,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)E\left(T,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\right)\right|=\prod_{j=1}^{nm}\left|\nu-\mu_j(D)\right|,$$

$$\left|\det\left(\mu-\nu E^{-1}\left(T,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)E\left(0,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)\right)\right|=\prod_{j=1}^{nm}\left|\mu-\nu_j(D)\right|,$$

де $\mu_j(D)$ – власні значення матриці $\mu E^{-1}\left(0,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)E\left(T,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)$, а $\nu_j(D)$ – матриці $\nu E^{-1}\left(T,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)E\left(0,D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)$. Якщо корінь кратний, він повторюється необхідну кількість разів. Для довільного вектора $k\in\mathbf{Z}^p$ нерівність $\left|\nu-\mu_j(k)\right|<\varepsilon^{1/2}C_3^{1/nm}(r)\tilde{k}^{2r/nm}$ виконується для множини $B_{\nu j}(k)\times B$ векторів (ν,μ), міра цієї множини менша від величини $\varepsilon\pi^2C_3^{2/nm}(r)\tilde{k}^{2r/nm}$, а нерівність $\left|\mu-\nu_j(k)\right|<\varepsilon^{1/2}C_3^{1/nm}(r)\tilde{k}^{2r/nm}$ – для множини $B\times B_{\mu j}(k)$, міра якої також менша, ніж $\varepsilon\pi^2C_3^{2/nm}(r)\tilde{k}^{2r/nm}$. Очевидно, що множина B_ε міститься в об'єднанні множин $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}^p}\bigcup_{j=1}^{nm}\left(B_{\nu j}(k)\times B\right)$ та $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}^p}\bigcup_{j=1}^{nm}\left(B_{\nu j}(k)\times B\right)$ і $\operatorname{mes}B_\varepsilon\le\varepsilon$. Для векторів $(\nu,\mu)\notin B_\varepsilon$ виконуються протилежні нерівності $\left|\nu-\mu_j(D)\right|\ge\varepsilon^{1/2}C_3^{1/nm}(r)\tilde{k}^{r/nm}$ і $\left|\mu-\nu_j(D)\right|\ge\varepsilon^{1/2}C_3^{1/nm}(r)\tilde{k}^{r/nm}$ для всіх $k\in\mathbf{Z}^p$. Звідси та із рівностей (17), (18) отримуємо шукану нерівність (16). Теорема доведена.

Приймемо, що $\alpha(\xi)=\min\limits_{0\le t(\xi)\le T}\left(f(\xi)+(nm-1)\max\left(f_0(\xi),f_T(\xi)\right)-\max\left(f_1(0,\xi),f_1(T,\xi)\right)\right)$ і $\alpha=\sup\limits_{k\in\mathbf{Z}^p}\alpha\left(k/\tilde{k},1/\tilde{k}\right)$, тоді для векторів $(\nu,\mu)\in(B\times B)\setminus B_\varepsilon$ справедлива така теорема існування:

Теорема 3. *Якщо* $\tilde{D}^{q-j-r}\varphi_j\in\bar{\mathbf{E}}_\alpha$ $\left(j=\overline{0,n-1}\right)$, *то існує і єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору* $\bar{\mathbf{H}}_q^n$, *який становлять* m *перших компонент вектора (8).*

Доведення. З нерівностей (4), (9)-(12), (16) випливає, що

$$\|u\|_{q,n}^2\le\frac{4(nm)^{nm}C_1C_2}{\varepsilon^{nm}C_3^2(r)}\left\|e^{\tilde{D}\alpha\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)}Z\tilde{D}^{-r}\varphi\right\|_{q-n}^2\le$$

$$\le\frac{4(nm)^{nm}C_1C_2}{\varepsilon^{nm}C_3^2(r)}\sum_{j=0}^{n-1}\left\|e^{\tilde{D}\alpha\left(D/\tilde{D},I/\tilde{D}\right)}Z\tilde{D}^{-r}\varphi\right\|_{q-n}^2.$$

Вигляд розв'язку одержуємо за формулами (3) і (8). Єдиність випливає з нерівності (6). Теорема доведена.

1. Илькив В.С. Возмущение нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами // ДУ "Львівська політехніка". 1990. Т.26. №11. С.1962-1971. 2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984. 3. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь з час-

тинними похідними // УМЖ. 1996. Т.48, №2. С.184-194. 4. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // ДУ "Львівська політехніка". 1977. Т.13. №4. С.637-645. 5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6. Підстригач конф. 7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., 1984. 8. Ильків В.С., Пташник Б.И. Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // ДУ "Львівська політехніка". 1984. Т.20. №6. С.1012-1023. 9. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., 1978. 10. Колмогоров А.Н., Арнольд В.И. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 93. №5. 1953. С.763-766. 11. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 18. №6. 1963. С.91-192. 12.Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в небесной механике. К., 1969. 13. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М., 1978.

УДК 517.948

О.М. Дашко
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

АНАЛОГИ МЕТОДУ КУРПЕЛЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Запропоновано двосторонній метод, який не тільки зберігає надлінійну збіжність курпелівських алгоритмів, а й не вимагає диференційовності правої частини рівняння $x'(t) = f(t, x)$ щодо *x*.

Twosided method, which is not only saving the super linear convergence of Kurlel's algorithms, but does not demand the differentiability with respect fox of the right term of the equation $x'(t) = f(t, x)$ is proposed *x*.

Тут поширимо методику побудови аналогів двосторонніх алгоритмів Курпеля [1] на звичайні диференціальні рівняння, які містять запізнення аргументу. Застосування двосторонніх алгоритмів до таких класів рівнянь започатковане у дослідженнях Г.М. Жданова [2], А.Д. Мишкіса [3] (див. також [1]).

Будемо розглядати рівняння вигляду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) - h(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{1}$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$, $\Delta(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$ – неперервна і неперервні при $t \in [t_0, T]$, $y, s \in S(x_0, M)$ функції $g(t, y, z)$, $h(t, y, z)$. Шукатимемо неперервно диференційовний при $t \in [t_0, T]$ розв'язок $x(t)$ рівняння (1), який задовольняє початкову умову