УДК 539.38

І.С. Скородинський, В.А. Лазько
ІППММ НАН України
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

АЛЬТЕРНАТИВНИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ КВАЗІСТАТИЧНОЇ ОДНОСТОРОННЬОЇ ТЕРМОФРИКЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ З УСКЛАДНЕНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Побудовано альтернативний ітераційний алгоритм для квазіваріаційної системи, що відповідає квазістатичній односторонній термофрикційній задачі з ускладненими контактними умовами. Звичайну варіаційну нерівність, що виникає на кожній ітерації, запропоновано розв'язувати методом двоїстості з застосуванням алгоритму Удзави, що дає змогу одночасно отримати поля переміщень та контактних напружень. Показано, що при виконанні певних достатніх умов як конструктивний [4], так і альтернативний алгоритми збігаються зі швидкістю геометричної прогресії у відповідних нормах.

Alternative iterative algorithm for quasivariational system corresponding to a quasistatic unilateral thermal friction problem with complicated contact conditions is developed. Duality method and the Uzawa algorithm allowing to obtain the displacements and the contact stress fields simultaneously are suggested to solve an ordinary variational inequality arising at every iteration. Convergence of both constructive [4] and alternative algorithms as quickly as a geometric series does in corresponding norms when certain sufficient conditions are met is shown.

У роботі [1] поставлено та досліджено квазістатичну односторонню термофрикційну задачу для двох анізотропних термопружних тіл за наявності узагальненого лінійно-дисипативного механізму ковзання та неідеального теплового контакту в області реальної взаємодії.Там же зроблено сильну та слабку постановки задачі, визначено функціональні простори, де розшукується розв'язок, сформульовано і доведено теореми існування розв'язку, досліджено питання єдиності. Слабка постановка задачі – це квазіваріаційна система [1]. Зазначимо, що звичайні варіаційні системи для односторонніх задач динамічної зв'язаної термопружності досліджено в [2], а відповідні односторонні стаціонарні задачі – в [3].

Для розв'язування вищезгаданої квазіваріаційної системи в роботі [4] запропоновано ідею розщеплення механічних і температурних полів та побудовано і досліджено на збіжність ітераційний алгоритм, який є конструктивним у тому сенсі, що він наслідує схему доведення існування розв'язку квазіваріаційної системи [1]. У цій роботі буде побудовано альтернативний ітераційний алгоритм, який не є конструктивним, але є ближчим до класичного підходу до розв'язування квазістатичних задач термопружності, оскільки починається з визначення температурних полів. Зауважимо, що цей підхід є узагальненням методу послідовних наближень, запропонованого в роботі [5] для ізотермічної квазістатичної задачі з тертям.

1. Варіаційне формулювання задачі. Слабке (варіаційне) формулювання задачі – це така квазіваріаційна система [1]:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u})-\beta(\mathbf{q},\mathbf{v}-\mathbf{u})-L_p(\mathbf{v}-\mathbf{u})+\int_{S_c} f\left|\sigma_n^{(1)}\right|\left(\left|[\Delta\mathbf{v}_\tau]\right|-\left|[\Delta\mathbf{u}_\tau]\right|\right)dS\geq 0\quad\forall\mathbf{v}\in K; \qquad (1)$$

$$\left(c_v\dot{\mathbf{q}},\mathbf{j}-\mathbf{q}\right)+\lambda(\mathbf{q},\mathbf{j}-\mathbf{q})+\int_{S_{cr}}\left\{\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{t}+h_\theta\left(\sigma_n^{(1)}\right)[\theta]+\frac{c}{6}\left(2\dot{\theta}^{(1)}+\dot{\theta}^{(2)}\right)\right]\left(\varphi^{(1)}-\theta^{(1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{t}-h_\theta\left(\sigma_n^{(1)}\right)[\theta]+\frac{c}{6}\left(2\dot{\theta}^{(2)}+\dot{\theta}^{(1)}\right)\right]\left(\varphi^{(2)}-\theta^{(2)}\right)\right\}dS=L_h(\mathbf{j}-\mathbf{q})- \qquad (2)$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{S_\alpha^{(i)}}\alpha^{(i)}\left(\theta^{(i)}-\theta_s^{(i)}\right)\left(\varphi^{(i)}-\theta^{(i)}\right)dS\qquad\forall\varphi\in W(0,\,T).$$

В $(1)-(2)$ $\mathbf{u}=\left(\mathbf{u}^{(1)},\mathbf{u}^{(2)}\right)$ та $\theta=\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)$ є векторами шуканих переміщень та температурних полів, через S_c та S_{cr} позначено максимальну та реальну площадки контакту відповідно, $\mathbf{p}_n^{(i)}=\tau_n^{(i)}+\sigma_n^{(i)}\mathbf{n}$ (i=1, 2; $\mathbf{n}$ – одинична нормаль, спрямована всередину тіла 1) є регуляризацією в $\left[L^2\left(S_c\right)\right]^3$ вектора контактних напружень [1, 3], τ є симетризованим дотичним контактним напруженням [1], а значення у жирних квадратних дужках означають стрибки слідів відповідних полів на S_c [1, 2]. Решту позначень, зокрема означення білінійних форм $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\beta(\theta,\mathbf{u})$, $\lambda(\theta,\varphi)$, $\left(c_v\dot{\theta},\varphi\right)$, лінійних функціоналів $L_p(\mathbf{v})$, $L_h(\varphi)$ та замкненої опуклої множини допустимих переміщень K наведено в [1]. Множина $W(0,T)$ визначається так:

$$W(0,T)\overset{df}{=}\left\{\mathbf{j}\equiv\left(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\right)\in L^2(0,T;V_\theta)\cap L^\infty(0,T;V_\theta):\ \dot{\mathbf{j}}\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^{(1)}\right)\times\right.\right.$$

$$\times L^2\left(\Omega^{(2)}\right)\Big)\cap L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^{(1)}\right)\times L^2\left(\Omega^{(2)}\right)\right);\ \varphi^{(i)}=\hat{\theta}^{(i)}\ \text{’€}\ S_\theta^{(i)}$$

$$\left.\forall t\in[0,T];\ \varphi^{(i)}(\mathbf{x},0)=\theta_0^{(i)},\ \theta_0^{(i)}\in V_\theta^{(i)}\ \ (i=1,2)\right\}.$$

Тут через $\Omega^{(i)}\subset\mathbf{R}^3$ $(i=1,\,2)$ позначено відкриті зв’язні області, які займають тіла; $V_\theta^{(i)}=H^1\left(\Omega^{(i)}\right)$, $V_\theta=V_\theta^{(1)}\times V_\theta^{(2)}$; $H^s(\Omega)$ $(s\in\mathbf{R})$ є простором Соболєва порядку s, а $\hat{\theta}^{(i)}$ та $\theta_0^{(i)}$ є заданими граничними та початковими температурами відповідно. Означення просторів векторних розподілів $L^p(0,T;\,X)$, де X – Банахів простір, а $p\geq 1$ можна знайти в [2, 6]. Існування розв’язку $\{\mathbf{u},\ \theta\}\in K\times W(0,\,T)$ квазіваріаційної системи (1), (2) гарантується теоремами, доведеними в роботі [1], де встановлено також достатні умови єдиності слабкого розв’язку задачі.

2. Альтернативний ітераційний алгоритм. Побудуємо альтернативний ітераційний алгоритм для квазіваріаційної системи (1) – (2). З цією метою запишемо послідовність задач

$$a\left(\mathbf{u}^{m+1},\mathbf{v}-\mathbf{u}^{m+1}\right)-\beta\left(\mathbf{q}^{m+1},\mathbf{v}-\mathbf{u}^{m+1}\right)-L_p\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}^{m+1}\right)+\int_{S_c} f\left|\sigma_{n(1)}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m,\theta_{(1)}^m\right)\right|\left(\left|[\Delta\mathbf{v}_\tau]\right|-\right. \qquad (3)$$

$$\left.-\left|[\Delta\mathbf{u}_\tau^{m+1}]\right|\right)dS\geq 0\quad\forall\mathbf{v}\in K,\ \mathbf{u}^{m+1}\in K;$$

$$\left(c_v\dot{\mathbf{q}}^{m+1},\mathbf{j}-\mathbf{q}^{m+1}\right)+\lambda\left(\mathbf{q}^{m+1},\mathbf{j}-\mathbf{q}^{m+1}\right)+\int\limits_{S_{cr}^m}\left\{\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{t}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m,\theta_{(1)}^m\right)+h_\theta\left(\sigma_{n(1)}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m,\theta_{(1)}^m\right)\right)[\theta^{m+1}]+\right.\right.$$

$$+\frac{c}{6}\left(2\dot{\theta}_{(1)}^{m+1}+\dot{\theta}_{(2)}^{m+1}\right)\bigg]\left(\varphi_{(1)}-\theta_{(1)}^{m+1}\right)+\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{t}^m\left(\mathbf{u}_{(2)}^m,\theta_{(2)}^m\right)-h_\theta\left(\sigma_{n(1)}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m,\theta_{(1)}^m\right)\right)[\theta^{m+1}]+\right. \qquad (4)$$

$$\left.+\frac{c}{6}\left(2\dot{\theta}_{(2)}^{m+1}+\dot{\theta}_{(1)}^{m+1}\right)\bigg]\left(\varphi_{(2)}-\theta_{(2)}^{m+1}\right)\right\}dS=L_h\left(\mathbf{j}-\mathbf{q}^{m+1}\right)-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{S_\alpha^{(i)}}\alpha^{(i)}\left(\theta_{(i)}^{m+1}-\theta_s^{(i)}\right)\left(\varphi_{(i)}-\theta_{(i)}^{m+1}\right)dS$$

$$\forall\mathbf{j}\in W(0,T),\ \mathbf{q}^{m+1}\in W(0,T);\quad m=0,1,\dots\ .$$

Альтернативний ітераційний алгоритм формулюється так:

1) беручи нульове наближення переміщень і температур $\{\mathbf{u}^0,\ \theta^0\}$ (фактично нульове наближення вектора контактних напружень $\mathbf{p}^0=\tau^0+\sigma_{n(1)}^0\mathbf{n}$ та зони реального контакту S_{cr}^0), розв’язуємо варіаційне рівняння (4) і отримуємо подальше наближення температурних полів $\square=\left(\theta_{(1)}^1\ ,\ \theta_{(2)}^1\right)$;

2) розв’язуємо варіаційну нерівність (3) з заданими θ^1 та $\sigma_{n(1)}^0$ і отримуємо подальше наближення вектора переміщень $\mathbf{u}^1=\left(\mathbf{u}_{(1)}^1\ ,\ \mathbf{u}_{(2)}^1\right)$, вектора симетризованих дотичних контактних напружень $\mathbf{t}^1\left(\mathbf{u}_{(i)}^1,\theta_{(i)}^1\right)$, вектора контактних напружень $\mathbf{p}_{n(i)}^1\left(\mathbf{u}_{(i)}^1\ ,\ \theta_{(i)}^1\right)$ $(i=1,\ 2)$ та області реального контакту S_{cr}^1.

Ітерації тривають, доки не будуть виконані умови збіжності

$$\left\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m\right\|_{V_u}<\varepsilon_u\ ,\quad \left\|\theta^{m+1}-\theta^m\right\|_{V_\theta}<\varepsilon_\theta\ ,$$
$$\left\|\mathbf{p}_{n(i)}^{m+1}-\mathbf{p}_{n(i)}^m\right\|_{\left[L^2(S_c)\right]^3}<\varepsilon_p\qquad (i=1,\ 2)\ ,$$

де $V_u=\left[H^1\left(\Omega^{(1)}\right)\right]^3\times\left[H^1\left(\Omega^{(2)}\right)\right]^3$ як і в роботі [4]. Поля $\mathbf{u}^{m+1}=\left(\mathbf{u}_{(1)}^{m+1},\mathbf{u}_{(2)}^{m+1}\right)$, $\mathbf{p}_n^{m+1}=\left(\mathbf{p}_{n\,(1)}^{m+1}\ ,\ \mathbf{p}_{n\,(2)}^{m+1}\right)$, $\theta^{m+1}=\left(\theta_{(1)}^{m+1},\theta_{(2)}^{m+1}\right)$ та область S_{cr}^{m+1} приймаються за шуканий розв’язок. Крок 2) реалізується на основі методу двоїстості та алгоритму Удзави [4–7], що забезпечує одночасне отримання полів переміщень та контактних напружень. Відповідний Лагранжіан має вигляд

$$\mathsf{L}(\mathbf{v},\mathbf{q})=\frac{1}{2}a(\mathbf{v},\mathbf{v})-\beta\left(\mathbf{q}^{m+1},\mathbf{v}\right)-L_p(\mathbf{v})+\int\limits_{S_c}\left\{\mathbf{t}\cdot[\Delta\mathbf{v}_\tau]+\sigma_n^{(1)}\left(\delta+[v_n]\right)\right\}dS\ .$$

Тут через δ позначено прозір між тілами. Зауважимо, що $\sigma_{n(1)}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m\ ,\ \theta_{(1)}^m\right)$ у нерівності (3) можна замінити на $\sigma_{n(1)}^m\left(\mathbf{u}_{(1)}^m\ ,\ \theta_{(1)}^{m+1}\right)$, але тоді прийдеться перевизначати вектор контактних напружень кожний раз перед виконанням кроку 2).

3. Збіжність алгоритму. Використовуючи прийоми роботи [4], отримуємо для альтернативного алгоритму оцінки

$$\exists C_{u1}>0:\quad \left\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m\right\|_{V_u}\le\frac{C_{u1}f}{a_1}\ \left\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^{m-1}\right\|_{V_u},\quad a_1>0\ ;$$

$$\exists C_{\theta 1}>0: \ \left\|\mathbf{q}^{m+1}-\mathbf{q}^{m}\right\|_{L^2(0,T;V_\theta)} < C_{\theta 1}\left\|\mathbf{q}^{m}-\mathbf{q}^{m-1}\right\|_{L^2(0,T;V_\theta)} .$$

Нехай мають місце співвідношення

$$h_\theta(\sigma)=\alpha_h\, h_\theta^0(\sigma)\,, \quad \mathbf{V}=\alpha_V \mathbf{V}_0\,, \quad 0\le \max(\alpha_h\,,\ \alpha_V)\le \alpha\,, \quad C_{\theta 1}=C_{h1}\,\alpha_h+C_{V1}\,\alpha_V$$
$$(C_{h1}\,,\ C_{V1}>0)\,.$$

Тоді при $f<a_1/C_{u1}$ і $\alpha<\left(C_{h1}+C_{V1}\right)^{-1}$ альтернативний алгоритм збігається зі швидкістю геометричної прогресії у відповідних нормах. Якщо через C_{u2}, a_2, $C_{\theta 2}=C_{h2}\,\alpha_h+C_{V2}\,\alpha_V$ позначити константи, що відповідають конструктивному алгоритму, то при $f<\min\{a_1/C_{u1}\,,\ a_2/C_{u2}\}$ та $\alpha<\min\left\{\left(C_{h1}+C_{V1}\right)^{-1},\ \left(C_{h2}+C_{V2}\right)^{-1}\right\}$ отримаємо, що обидва алгоритми збігаються зі швидкістю геометричної прогресії у відповідних нормах. Якщо ж виконується нерівність

$$\alpha<\min\left\{\left(C_h+C_V\right)^{-1},\ \left(C_{h1}+C_{V1}\right)^{-1},\ \left(C_{h2}+C_{V2}\right)^{-1}\right\},$$

де C_h, C_V – відповідні константи у схемі доведення існування розв’язку [1], то обидва алгоритми збігаються з вищезгаданою швидкістю до єдиного розв’язку задачі.

1. Скородинський І.С., Лазько В.А. Квазістатична термофрикційна задача при наявності узагальненого лінійно-дисипативного механізму міжфазного проковзування // Вісн. ДУ “Львів. політехніка”. 1996. № 299. С. 144–154. 2. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М., 1989. 3. Duvaut G. Free Boundary Problem Connected with Thermoelasticity and Unilateral Contact // Free Boundary Probl. Semin. (Pavia, Sept. – Oct., 1979): Proc. Roma. 1980. Vol. 2. P. 217–236. 4. Скородинський І.С. Ітераційний алгоритм розв’язування квазістатичної термоконтактної задачі з ускладненими умовами міжфазного проковзування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1999. 42. №1. С. 75–81. 5. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. 44. № 1. С. 122–129. 6. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М., 1979. 7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., 1979.

УДК 517.946+511.37

В.С. Ільків, Я.М. Пелех, Б.О. Салига
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

НЕЛОКАЛЬНА ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається двоточкова нелокальна за часовою змінною крайова задача для безтипної нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінними