ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.625 № 625, (2008) с. 5–11

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.625 No 625, (2008) 5–11

ПРО ЯДРО ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

П.І. Каленюк[a, b], З.М. Нитребич[a], І.В. Когут[a]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Жешівський університет*
вул. Рейтана, 16-А, 35-959, Жешів, Польща

(Отримано 1 листопада 2008 р.)

Досліджено ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами. Знайдено необхідні та достатні умови належності до ядра функцій квазіполіномного вигляду та вказано формули для конструктивної побудови елементів ядра задачі за допомогою диференціально-символьного методу.

Ключові слова: рівняння із частинними похідними нескінченного порядку, інтегральні умови, ядро задачі, диференціально-символьний метод

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

Вступ

Під час дослідження різноманітних процесів та їх математичних моделей виникають задачі, в яких задаються умови, що пов'язують значення шуканого розв'язку та його похідних у різних точках межі області або в точках межі області та внутрішніх точках області. Такі умови, які називаються нелокальними, для широких класів диференціальних рівнянь вивчали А.В. Біцадзе, О.А. Самарський [3, 18], О.О. Дезін [5], А.М. Нахушев [13, 14], Б.Й. Пташник, В.С. Ільків [17], В.М. Борок, Е. Кенне [1, 2], М.І. Матійчук [11] та ін.

В останні роки значна увага науковців спрямована на клас задач з інтегральними умовами, які є безпосереднім узагальненням дискретних нелокальних умов. Інтегральні умови виникають під час моделювання фізичних явищ у разі, коли межа області, у якій відбувається процес, є недосяжною для безпосередніх вимірювань. До задач такого типу зводяться дослідження процесу дифузії частинок у турбулентному середовищі, процесів поширення тепла, вологопереносу у капілярно-пористих середовищах. Інтегральні умови, крім того, широко використовуються в обернених задачах математичної фізики, у задачах математичної біології для описання динаміки чисельності популяції, а також у задачах демографії.

Задачу з інтегральною умовою для рівняння теплопровідності вивчали Дж.Р. Кеннон [21], М.І. Іонкін [6]. Обернені задачі для рівняння теплопровідності та параболічних рівнянь з невідомими коефіцієнтами у рівняннях з використанням інтегральних умов вивчали Дж.Р. Кеннон, В. Рандел [21, 22], М.І. Іванчов [23], О.І. Прилєпко [15], А. Лоренці [25], Б.Ф. Джоунс [24] та ін. Задачі керування термопружними деформаціями для рівняння теплопровідності вивчав В.М. Вігак [4]. У працях останніх років почали досліджувати задачі з інтегральними умовами для інших типів рівнянь, а також для безтипних рівнянь – це дослідження Л.В. Фардіголи [19], П.І. Штабалюка (§7.4 в [17]), Л.С. Пулькіної та А.І. Кожанова [10, 16], М.М. Симотюка та О.М. Медвідь [12], А. Буціані [20] та ін.

I. Постановка задачі

У роботі вивчається задача

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^s, \quad (1)$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad (2)$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальний вираз загалом нескінченного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілим аналітичним символом $a(\nu) \neq$ $\neq \text{const}$, $\nu \in \mathbb{R}^s$, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $s \in \mathbb{N}$.

Уведемо до розгляду клас K_M квазіполіномів вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j \cdot x] Q_j(x),$$

де $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{js}) \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq$ $\neq k$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $\alpha_j \cdot x = \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{jk} x_k$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, – деякі поліноми з комплексними коефіцієнтами, а також клас $K_{L,M}$ квазіполіномів вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\beta_j t + \alpha_j \cdot x] Q_j(t,x),$$

де $\beta_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq \alpha_k \vee \beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$; $Q_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, – поліноми змінних t і x з комплексними коефіцієнтами.

У роботі вивчається конструктивна побудова розв'язків задачі (1), (2) у класі квазіполіномів з використанням диференціально-символьного методу [7, 8].

II. Основні результати

A Випадок однієї просторової змінної

Покладемо в задачі (1), (2) $s = 1$. Відповідно до диференціально-символьного методу диференціальному виразові $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заміною $\frac{\partial}{\partial x}$ на параметр $\nu \in \mathbb{R}$ поставимо у відповідність його символ – функцію $a(\nu)$. Як показано у [9, лема 1], розв'язок рівняння (1) квазіполіномного вигляду можна подати у вигляді

$$U(t,x) = \left\{ g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \exp\left[a(\nu)t + \nu x\right] \right\}\Big|_{\nu=0}, \qquad (3)$$

тобто як дію диференціального виразу $g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ за параметром ν на розв'язок рівняння (1) класично відокремленого вигляду $\exp\left[a(\nu)t + \nu x\right]$, а саме:

$$G(t,x,\nu) = g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \exp\left[a(\nu)t + \nu x\right]$$

з покладанням параметра ν після дії таким, що дорівнює нулеві:

$$U(t,x) = G(t,x,0).$$

Розв'язок (3) визначається для довільного квазіполінома

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp\left[\alpha_j x\right] Q_j(x) \qquad (4)$$

з класу $K_{\mathbb{C}}$ за формулою

$$\left\{ g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \exp\left[a(\nu)t + \nu x\right] \right\}\Big|_{\nu=0} \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{m} \left\{ Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \exp\left[a(\nu)t + \nu x\right] \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} \qquad (5)$$

(використовується скінченна кількість операцій диференціювання).

Підберемо функцію $g(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}}$ так, щоб виконувалась умова (2).

Розглянемо функцію

$$\eta(\nu) = \frac{\exp\left[a(\nu)T\right] - 1}{a(\nu)} \qquad (6)$$

і множину її нулів

$$P = \{\nu \in \mathbb{C} : a(\nu)T = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\},$$

де i – уявна одиниця.

Зауваження 1. За умови $k = 0$ корені рівняння $a(\nu)T = 2\pi k i$ є нулями функції $\exp\left[a(\nu)T\right] - 1$, але не є нулями функції $\eta(\nu)$; якщо ν^* – корінь рівняння $a(\nu) = 0$, то $\eta(\nu^*) = T$.

Через p_α позначимо кратність нуля $\alpha \in P$ функції $\eta(\nu)$.

Теорема 1. *Нехай $g(x)$ – квазіполіном з класу K_P вигляду (4), $Q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, – довільні поліноми степенів n_j, причому $n_j \leq p_{\alpha_j} - 1$. Тоді функція (3) є розв'язком задачі (1), (2).*

□ *Доведення.* Оскільки $g(x)$ – квазіполіном з K_P вигляду (4), то, як було зазначено вище, функція (3) є розв'язком рівняння (1). Покажемо виконання умови (2). Враховуючи рівність (5), матимемо

$$\int_0^T U(t,x)\,dt =$$
$$= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{m} \left\{ Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \exp\left[a(\nu)t + \nu x\right] \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} \right) dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left\{ Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left(\exp[\nu x] \int_0^T \exp[a(\nu)t]\,dt \right) \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left\{ Q_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left(\exp[\nu x] \eta(\nu) \right) \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j}.$$

Оскільки $\nu = \alpha_j \in P$ є нулем функції (6) кратності p_{α_j} і $n_j \leq p_{\alpha_j} - 1$, де $j = \overline{1,m}$, то усі доданки в останній сумі дорівнюють нулеві, тобто

$$\int_0^T U(t,x)\,dt = 0.$$

■

Теорема 2. *Якщо розв'язок $U(t,x)$ задачі (1), (2) є функцією з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$, то $U(t,x) \in K_{\mathbb{C},P}$ і має вигляд*

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t,x) \exp[\beta_j t + \alpha_j x],$$

у якому $Q_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, – деякі поліноми з комплексними коефіцієнтами, степені за змінною x яких не перевищують $p_{\alpha_j} - 1$.

□ *Доведення.* Нехай функція $U(t,x)$ з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$ є розв'язком задачі (1), (2). Тоді, як показано у [9, лема 1], її можна подати у вигляді (3), де

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp[\alpha_j x] \widehat{Q}_j(x), \quad m \in \mathbb{N}, \ \alpha_j \in \mathbb{C},$$

$\widehat{Q}_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, – поліноми степенів $n_j \in \mathbb{N}$. Оскільки функція (3) задовольняє умову (2), то виконується тотожність за змінною x:

$$\left\{ g\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) (\exp[\nu x]\eta(\nu)) \right\}\Big|_{\nu=0} \equiv 0.$$

Останню тотожність запишемо у вигляді формули (5):

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ \widehat{Q}_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) (\exp[\nu x]\eta(\nu)) \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} \equiv 0.$$

Оскільки $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, де $j,k = \overline{1,m}$, то

$$\left\{ \widehat{Q}_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) (\exp[\nu x]\eta(\nu)) \right\}\Big|_{\nu=\alpha_j} \equiv 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Завдяки лінійній незалежності функцій 1, x, x^2, $\ldots$, x^{n_j-1} тотожність (7) можлива лише тоді, коли α_j є нулем функції (6), тобто $\alpha_j \in P$, причому $n_j \leq p_{\alpha_j} - 1$. ■

Приклад 1. Знайдемо розв'язки задачі з інтегральною умовою для рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0,2\pi), \ x \in \mathbb{R}, \\ &\int_0^{2\pi} U(t,x)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Для цієї задачі $T = 2\pi$, $a(\nu) = \nu^2$,

$$\eta(\nu) = \frac{\exp[2\pi\nu^2] - 1}{\nu^2},$$
$$P = \{\nu \in \mathbb{C} : \nu^2 = ki, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}.$$

До множини P належать числа:

$$\nu_{k1} = \frac{\sqrt{2k}}{2}(1+i),$$
$$\nu_{k2} = -\frac{\sqrt{2k}}{2}(1+i),$$
$$\nu_{k3} = \frac{\sqrt{2k}}{2}(1-i),$$
$$\nu_{k4} = -\frac{\sqrt{2k}}{2}(1-i), \quad k \in \mathbb{N},$$

причому кратність цих нулів функції $\eta(\nu)$ дорівнює 1.

Відповідно до теореми 1 розв'язками задачі (8) є такі серії розв'язків:

$$U_{k1}(t,x) = A_{k1} \exp\left[\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right] \cos\left(kt + \frac{\sqrt{2k}}{2}x\right),$$
$$U_{k2}(t,x) = A_{k2} \exp\left[\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right] \sin\left(kt + \frac{\sqrt{2k}}{2}x\right),$$
$$U_{k3}(t,x) = A_{k3} \exp\left[-\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right] \cos\left(kt - \frac{\sqrt{2k}}{2}x\right),$$
$$U_{k4}(t,x) = A_{k4} \exp\left[-\frac{\sqrt{2k}}{2}x\right] \sin\left(kt - \frac{\sqrt{2k}}{2}x\right),$$

де $A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, A_{k4} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, та їх всеможливі лінійні комбінації. Ці розв'язки обчислено за формулою (3), у якій $g(x)$ має один з виглядів:

$$C_{m1} \exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{2}(1+i)x\right],$$
$$C_{m2} \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{2}(1+i)x\right],$$
$$C_{m3} \exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{2}(1-i)x\right],$$
$$C_{m4} \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{2}(1-i)x\right],$$

де $C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4} \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

Приклад 2. Опишемо деякі розв'язки такої задачі з інтегральною умовою:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2\pi i\right] U(t,x) = 0, \ t \in (0,1), x \in \mathbb{R}, \\ &\int_0^{1} U(t,x)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Для цієї задачі маємо $a(\nu) = \nu^2 + \nu^3 + 2\pi i$, $T = 1$,

$$\eta(\nu) = \frac{\exp\left[\nu^2 + \nu^3 + 2\pi i\right] - 1}{\nu^2 + \nu^3 + 2\pi i},$$
$$P = \left\{\nu \in \mathbb{C} : \nu^2 + \nu^3 + 2\pi i = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}.$$

До множини P належить, зокрема, число 0. Кратність цього нуля функції $\eta(\nu)$ дорівнює 2.

Відповідно до теореми 1, щоб знайти квазіполіномні розв'язки задачі (9), що відповідають нулеві $\alpha = 0$, за функцію $g(x)$ можна взяти поліном вигляду $g(x) = Ax + B$. Такі розв'язки задачі (9) визначаються за формулою

$$\begin{aligned} &U(t,x) = \\ &= \left\{ \left(A\frac{\partial}{\partial \nu} + B\right) \exp\left[\left(\nu^2 + \nu^3 + 2\pi i\right)t + \nu x\right] \right\}\Big|_{\nu=0} = \\ &= (Ax+B)\exp[2\pi i t], \quad A, B \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Опишемо деякі квазіполіномні розв'язки задачі для диференціально-функціонального рівняння:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-\frac{U(t,x+1)-U(t,x-1)}{2}=0,\\ t\in(0,2\pi),\ x\in\mathbb{R},\\ \int\limits_0^{2\pi}U(t,x)dt=0,\quad x\in\mathbb{R}.\end{gathered}\tag{10}$$

Для цієї задачі маємо $a(\nu)=\operatorname{sh}\nu$, $T=2\pi$,

$$\eta(\nu)=\frac{\exp\left[2\pi\operatorname{sh}\nu\right]-1}{\operatorname{sh}\nu},$$

$$P=\{\nu\in\mathbb{C}:\operatorname{sh}\nu=ki,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}.$$

Візьмемо, наприклад, $k=1$. Маємо $\operatorname{sh}\nu=i$, звідки $\nu=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)i$, $m\in\mathbb{Z}$. Покладемо, наприклад, $m=0$. Тоді знайдемо один з нулів функції $\eta(\nu)$, що дорівнює $\frac{\pi}{2}i$, причому він має кратність 2.

Відповідно до теореми 1 для побудови квазіполіномних розв'язків задачі (10), що відповідають нулеві $\alpha=\frac{\pi}{2}i$, за функцію $g(x)$ можна взяти квазіполіном вигляду $g(x)=\exp\left[\frac{\pi}{2}ix\right](Ax+B)$, де $A,B\in\mathbb{C}$.

Знайдемо розв'язки задачі (10):

$$\begin{aligned}&U(t,x)=\\&=\left\{\left(A\frac{\partial}{\partial\nu}+B\right)\exp\left[(\operatorname{sh}\nu)t+\nu x\right]\right\}\Big|_{\nu=\frac{\pi}{2}i}=\\&=(Ax+B)\exp\left[i\left(t+\frac{\pi}{2}x\right)\right],\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}&U_1(t,x)=(Ax+B)\cos\left(t+\frac{\pi}{2}x\right),\\&U_2(t,x)=(Ax+B)\sin\left(t+\frac{\pi}{2}x\right),\quad A,B\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

B Випадок багатьох просторових змінних

Розглянемо задачу (1), (2) для випадку довільного $s\in\mathbb{N}$.

Розв'язки рівняння (1), які належать до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$, шукатимемо у вигляді

$$U(t,x)=\left\{g\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\exp\left[a(\nu)t+\nu\cdot x\right]\right)\right\}\Big|_{\nu=0},\tag{11}$$

де $g\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ – диференціальний вираз, символом якого є функція $g(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}^s}$.

Як і в одновимірному випадку, підбиратимемо функцію $g(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}^s}$ так, щоб виконувалась умова (2).

Розглянемо функцію (6), у якій, очевидно, тепер $\nu\in\mathbb{C}^s$. Нехай

$$P=\{\nu\in\mathbb{C}^s:a(\nu)T=2\pi ki,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}.$$

Для $\alpha\in P$ розглядатимемо такі множини мультиіндексів:

$$\begin{aligned}&\Omega_1(\alpha)=\left\{\omega\in\mathbb{Z}_+^s:\left(\tfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^\omega\eta\Big|_{\nu=\alpha}\neq0\right\};\\&\Omega_2(\alpha)=\Big\{\widetilde{\omega}\in\mathbb{Z}_+^s:\widetilde{\omega}=\omega+r,\omega\in\Omega_1(\alpha),\\&\qquad r\in\mathbb{Z}_+^s,r\neq(0,0,\ldots,0)\Big\};\\&\Omega(\alpha)=\Omega_1(\alpha)\cup\Omega_2(\alpha),\quad\overline{\Omega}(\alpha)=\mathbb{Z}_+^s\backslash\Omega(\alpha).\end{aligned}$$

Зауваження 2. Якщо $\omega\in\overline{\Omega}(\alpha)$, то виконується рівність $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^\omega\eta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha}=0$, причому

$$U(t,x)=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^\omega\exp\left[a(\nu)t+\nu\cdot x\right]\right\}\Big|_{\nu=0}$$

є розв'язком задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай функція $g(x)$ – квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C}^s}$ вигляду*

$$g(x)=\exp\left[\alpha\cdot x\right]Q(x),\tag{12}$$

де $\alpha\in P$, $Q(x)$ – довільний поліном від s змінних вигляду

$$Q(x)=\sum_{|r|\leq n}B_rx^r,\quad r\in\mathbb{Z}_+^s,\ n\in\mathbb{N},\tag{13}$$

коефіцієнти якого задовольняють систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{\substack{r\geq q,|r|\leq n,\\ r\in\Omega(\alpha),\\ r-q\in\Omega_1(\alpha)}}B_rC_r^q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha}=0,\tag{14}$$

у якій $q\in\mathbb{Z}_+^s$, $|q|\leq n-1$, а нерівність $r\geq q$ означає, що $r_j\geq q_j$, $j=\overline{1,s}$. Тоді функція (11) є розв'язком задачі (1), (2). Навпаки, якщо функція з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ за умови $m=1$ є розв'язком задачі (1), (2), то її можна подати у вигляді (11), де $g(x)$ має вигляд (12), $\alpha\in P$ і коефіцієнти B_r полінома $Q(x)$ задовольняють систему (14).

□ *Доведення.* Подібно, як і в одновимірному випадку, можемо записати:

$$\int_0^T U(t,x)\,dt =$$

$$= \left\{ Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\exp\left[\nu\cdot x\right]\int_0^T \exp\left[a(\nu)t\right]\,dt\right)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \left\{ Q\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(\exp\left[\nu\cdot x\right]\eta(\nu)\right)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|\le n} B_r \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r \left(\exp\left[\nu\cdot x\right]\eta(\nu)\right)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|\le n} B_r \sum_{q\le r} C_r^q x^q \exp\left[\alpha\cdot x\right]\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp\left[\alpha\cdot x\right]\sum_{|r|\le n}\sum_{q\le r} B_r C_r^q x^q\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp\left[\alpha\cdot x\right]\sum_{|q|\le n}\sum_{\substack{r\ge q,\\ |r|\le n}} B_r C_r^q x^q\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp\left[\alpha\cdot x\right]\sum_{|q|\le n} x^q \sum_{\substack{r\ge q,\\ |r|\le n}} B_r C_r^q\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha}.$$

Останній вираз дорівнюватиме нулю тоді та лише тоді, коли

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^s, |q|\le n:\ \sum_{\substack{r\ge q,\\ |r|\le n}} B_r C_r^q \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} = 0,$$

звідки одержимо

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^s, |q|\le n:\ \sum_{\substack{r\ge q, |r|\le n,\\ r\in\Omega(\alpha),\\ r-q\in\Omega_1(\alpha)}} B_r C_r^q \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{r-q}\eta(\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Оскільки за умови $|q| = n$ усі рівняння будуть тотожностями $0 = 0$, то в останній системі рівнянь можна вважати, що $|q| \le n-1$. Теорему доведено. ■

Аналогічне твердження можна сформулювати для випадку, коли $g(x)$ – довільний квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C}^s}$, тобто для $m\in\mathbb{N}$.

Наслідок 1. Якщо функція $U(t,x)$ належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ і є розв'язком задачі (1), (2), то $U(t,x)\in K_{\mathbb{C},P}$.

Приклад 4. Розглянемо задачу

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]U(t,x,y) = 0,\\ t\in(0,2\pi),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\\ \int_0^{2\pi} U(t,x,y)dt = 0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{gathered} \tag{15}$$

Маємо $a(\nu) = (\nu_1 + i\nu_2)^2$, $T = 2\pi$, $s = 2$,

$$\eta(\nu) = \frac{\exp\left[2\pi(\nu_1+i\nu_2)^2\right]-1}{(\nu_1+i\nu_2)^2},$$

$$P = \left\{\nu\in\mathbb{C}^s : (\nu_1+i\nu_2)^2 = ki, k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}.$$

До множини P, зокрема, належить $\alpha = (1,1)$. Шукатимемо розв'язок цієї задачі, що відповідає цьому нулеві, у випадку, коли $g(x,y)$ є поліномом другого степеня:

$$\begin{gathered}g(x,y) = B_{(0,0)} + B_{(1,0)}x + B_{(0,1)}y + \\ +B_{(2,0)}x^2 + B_{(1,1)}xy + B_{(0,2)}y^2.\end{gathered}$$

До множини $\Omega_1(\alpha)$ належать мультиіндекси $(1,0)$, $(0,1)$. До $\Omega_2(\alpha)$ належать, зокрема, мультиіндекси $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. До множини $\overline{\Omega}(\alpha)$ належить лише мультиіндекс $(0,0)$. Запишемо для цього випадку систему (14):

$$\left\{\begin{aligned}
&B_{(1,0)}C_{(1,0)}^{(0,0)}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(0,1)}C_{(0,1)}^{(0,0)}\frac{\partial}{\partial\nu_2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(2,0)}C_{(2,0)}^{(0,0)}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(1,1)}C_{(1,1)}^{(0,0)}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(0,2)}C_{(0,2)}^{(0,0)}\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} = 0, \\
&B_{(2,0)}C_{(2,0)}^{(1,0)}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(1,1)}C_{(1,1)}^{(1,0)}\frac{\partial}{\partial\nu_2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} = 0, \\
&B_{(1,1)}C_{(1,1)}^{(0,1)}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} + \\
&\quad +B_{(0,2)}C_{(0,2)}^{(0,1)}\frac{\partial}{\partial\nu_2}\eta(\nu)\Big|_{\nu=(1,1)} = 0,
\end{aligned}\right.$$

тобто

$$\left\{\begin{aligned}
&B_{(1,0)}\cdot 1\cdot 2\pi(1-i) + B_{(0,1)}\cdot 1\cdot 2\pi(1+i) + \\
&\quad +B_{(2,0)}\cdot 1\cdot 2\pi(8\pi+3i) + B_{(1,1)}\cdot 1\cdot 2\pi(-3+8\pi i) + \\
&\quad +B_{(0,2)}\cdot 1\cdot 2\pi(-8\pi-3i) = 0, \\
&B_{(2,0)}\cdot 2\cdot 2\pi(1-i) + B_{(1,1)}\cdot 1\cdot 2\pi(1+i) = 0, \\
&B_{(1,1)}\cdot 1\cdot 2\pi(1-i) + B_{(0,2)}\cdot 2\cdot 2\pi(1+i) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Звідси отримаємо $B_{(0,1)} = iB_{(1,0)}$, $B_{(0,2)} = \frac{i}{2}B_{(1,1)}$, $B_{(2,0)} = -\frac{i}{2}B_{(1,1)}$, $B_{(0,0)}$, $B_{(1,0)}$, $B_{(1,1)}$ – довільні комплексні числа.

Обчислимо значення функції $\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+ +\nu_2y]$ та її похідних у точці $(1,1)$:

$$\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y];$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y]\,(2(1+i)t+x)\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y]\,(2(-1+i)t+y)\,;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y]\big(8it^2+2t+ \\ +4(1+i)tx+x^2\big);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y]\big(-8t^2+2it+2(-1+i)tx+ \\ +2(1+i)ty+xy\big);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\left\{\exp[(\nu_1+i\nu_2)^2t+\nu_1x+\nu_2y]\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = \\ = \exp[2it+x+y]\big(-8it^2-2t+ \\ +4(-1+i)ty+y^2\big).$$

Відповідно до теореми 3 знаходимо розв'язок задачі (15) за формулою (11), у якій

$$g(x,y) = \exp[x+iy]\Bigg(C_0+C_1(x+iy)+ \\ + C_2\left(-\frac{i}{2}x^2+xy+\frac{i}{2}y^2\right)\Bigg),$$

де $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$:

$$U(t,x,y) = \exp[2it+x+y]\Big(C_0+ \\ +C_1\big[\,(2(1+i)t+x)+i\,(2(-1+i)t+y)\,\big]+ \\ +C_2\Big[-\frac{i}{2}\big(8it^2+2t+4(1+i)tx+x^2\big)+ \\ +\big(-8t^2+2it+2(-1+i)tx+2(1+i)ty+xy\big)+ \\ +\frac{i}{2}\big(-8it^2-2t+4(-1+i)ty+y^2\big)\Big]\Big) = \\ = \exp[2it+x+y]\Big(-C_0-C_1(x+iy)+ \\ +\frac{C_2 i}{2}(x+iy)^2\Big),$$

де $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$,

або

$$U(t,x) = \\ = \exp[2it+x+y]\,\left(A+B(x+iy)+C(x+iy)^2\right),$$

де $A, B, C \in \mathbb{C}$.

Висновки

Отже, задача з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами має нетривіальне ядро. Знайдено необхідні та достатні умови належності до ядра задачі функцій квазіполіномного вигляду. За допомогою диференціально-символьного методу вказано спосіб їх побудови.

Література

[1] Борок В.М., Кенне Э. Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе // Изв. вузов. Математика. – 1994. – №5. – С. 3–12.

[2] Борок В.М., Кенне Э. Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе // Укр. мат. журнал. – 1994. – **46**, №4. – С. 338–346.

[3] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, №4. – С. 739–740.

[4] Вігак В.М. Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – №8. – С. 57–60.

[5] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

[6] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №2. – С. 294–304.

[7] Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

[8] Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №2. – С. 7–15.

[9] Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. Про ядро задачі з нелокальною двоточковою умовою для

рівняння із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 116–128.

[10] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2005. – **404**, №5. – С. 589–592.

[11] Матійчук М.І. Про нелокальну параболічну крайову задачу // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №3. – С. 362–367.

[12] Медвідь О.М., Симотюк М.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, №2. – С. 115–140.

[13] Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, №1. – С. 96–105.

[14] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, №1. – С. 72-81.

[15] Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала // Мат. заметки. – 1973. – **14**, вып.5. – С. 755–767.

[16] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, №7. – С. 887–892.

[17] Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[18] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, №11. – С. 1925–1935.

[19] Фардигола Л.В. Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. – 1993. – **53**, вып. 6. – С. 122–129.

[20] Bouziani A. Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**. – P. 371–386.

[21] Cannon J.R. The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**. – P. 155–160.

[22] Cannon J.R., Rundell W. An inverse problem for an elliptic partial differential equation // J. Math. Anal. Appl. – 1987. – **126**. – P. 329–340.

[23] Ivanchov M.I. Inverse problem for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publisher, 2003. – 240 p.

[24] Jones B.F. Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – **16**. – P. 33–44.

[25] Lorenzi A. Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ricerche Mat. – 1983. – **32**, No 2. – P. 263–284.

ON A NULL SPACE OF THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR INFINITE ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

P.I. Kalenyuk[a, b], Z.M. Nytrebych[a], I.V. Kohut[a]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera str., 79013 Lviv, Ukraine
[b] *University of Rzeszów,*
16-A Rejtan str., 35-959 Rzeszów, Poland

The paper deals with investigating a null space of the problem with integral condition for PDE of first order in time variable and generally infinite order in spatial variables with constant complex coefficients. We have found the necessary and sufficient conditions for quasipolynomial functions to belong to the null space. We specify the formulas for constructing the elements of the null space by means of the differential-symbol method.

Keywords: infinite order PDE, integral condition, null space of the problem, differential-symbol method

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95