УДК 517.95

Я.О. Баранецький, А.В. Копчук-Кашецький
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто нелокальну багатоточкову задачу для бігармонічного рівняння. Досліджено деякі властивості для оператора цієї задачі, побудовано систему власних функцій і встановлено її властивості.

This paper considers a nonlocal multipoints problem for biharmonical equation. Some properties for the operator of this problem are investigated, the eigen functions system is constructed and its properties are established.

Нехай $\Omega \;=\left\{\left(x_1 x_2\right)=x\in R^2\,,\;\; 0<x_1 x_2<1\right\}$; $\Gamma=\partial\,\Omega$ – межа області, ν – зовнішня нормаль до Γ в т. x; $C_0^\infty(\Omega)$ – множина фінітних нескінченно диференційовних функцій в області $\Omega\in R^n$; $W_2^4(\Omega)=\left\{u\in C^3(\Omega): D_x^4 u\in L_2(\Omega), D_y^4 u\in L_2(\Omega)\right\}$; – простір Соболєва з нормою

$$\|u\|^2_{W_2^4(\Omega)}=\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|D_x^4 u\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|D_y^4 u\right\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де $D_x^4 u,\;\; D_y^4 u$ – узагальнені похідні.

Розглянемо незбурену задачу

$$Zu\equiv\frac{\partial^{\,4} u}{\partial\, x_1^4}+\frac{\partial^{\,4} u}{\partial\, x_2^4}=f(x)\qquad (x\in\Omega) \tag{1}$$

$$\begin{cases} l_1^0 u\equiv u\big|_\Gamma = f_1(x') & (x'\in\Gamma)\\ l_2^0 u\equiv \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}\right|_\Gamma = f_2(x') & \end{cases} \tag{2}$$

Нехай $L^0: W_2^4(\Omega)\to L_2(\Omega)$ – оператор задачі (1), (2).

$L^0 u\equiv Zu$, коли $u\in D(L^0)$, $D(L^0)\equiv\left\{u\in W_2^4(\Omega): l_1^0 u=l_2^0 u=0\right\}$.

Введемо в розгляд нелокальну задачу

$$Zu\equiv\frac{\partial^{\,4} u}{\partial\, x_1^4}+\frac{\partial^{\,4} u}{\partial\, x_2^4}=f(x)\qquad (x\in\Omega) \tag{3}$$

$$l_{1,p}u\equiv\frac{\partial^{2p-2}}{\partial\, x_1^2}u(0,x_2)+\sum_{j=1}^m a_j\,(x_{1,j},x_2)\,\frac{\partial^{2p-2}}{\partial\, x_1^2}u(x_{1,j},x_2)=f_{1,p}(x_2)$$

$$l_{2,p}u\equiv\frac{\partial^{2p-2}}{\partial\, x_1^2}u(1,x_2)-\sum_{j=1}^m a_j\,(x_{1,j},x_2)\,\frac{\partial^{2p-2}}{\partial\, x_1^2}u(x_{1,j},x_2)=f_{2,p}(x_2)$$

$$l_{3,p}u \equiv \frac{\partial^{2p-2}}{\partial x_2^2}u(x_1,0)+\sum_{j=1}^{m}a_j\,(x_1,x_{2,j})\,\frac{\partial^{2p-2}}{\partial x_2^2}u(x_1,x_{2,j}) = f_{3,p}(x_1) \tag{4}$$

$$l_{4,p}u \equiv \frac{\partial^{2p-2}}{\partial x_2^2}u(x_1,1)-\sum_{j=1}^{m}a_j\,(x_1,x_{2,j})\,\frac{\partial^{2p-2}}{\partial x_2^2}u(x_1,x_{2,j}) = f_{4,p}(x_1) \quad ,$$

де $0<x_{1,1}<x_{1,2}<...<x_{1,m}<1$, $0<x_{2,1}<x_{2,2}<...<x_{2,m}<1$, $a_j(x_1,x_2)$ – задані функції, неперервні в $\bar{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$.,причому

$x_{1,S}=x_{1,m-s+1}$, $x_{2,S}=x_{2,m-s+1}$, $(s=\overline{1,n}), a_j(x_1,1-x_2)\equiv a_j(1-x_1,x_2)\equiv a_j\,(x_1,x_2)$ $(j=\overline{1,m})$,p=1,2.

Нехай $L:W_2^4(\Omega)\to L_2(\Omega)$ – оператор задачі (3), (4)

$$Lu\equiv Zu\,, \qquad u\in D(L); D(L)=\left\{V\in W_2^4(\Omega),\quad l_iV=0\,, \qquad i=1,2\right\}.$$

Оператори L^0 та L назвемо майже подібними, якщо

а) множини власних значень операторів L^0 та L збігаються;

б) існує оператор $Q:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ такий, що $Q:D(L^0)\to D(L)$ і $L=QL^0Q^{-1}$

П.1.Властивості оператора L^0 задачі (1),(2).

Методом відокремлення змінних можна показати, що оператор L^0 має такі властивості:

Лема 1. 1) точковий спектр L^0 складається з чисел вигляду

$$\lambda_{n,k}=\pi^4(n^4+k^4)\,,\quad (n,k=1,2)$$

2) система власних функцій оператора L^0

$$V(L^0)=\mathrm{v}^0_{k,m}(x_1,x_2)=\left\{2\sin\pi kx_1\,\sin\pi\,n\,x_2\,;\quad n,k=1,2,...\right\}$$

утворює ортонормовану базу в $L_2(\Omega)$.

Нехай

$$J_1u\,(x_1,x_2)\equiv u\,(1-x_1,x_2)\,;\;\; J_2u\,(x_1,x_2)\equiv u\,(x_1,1-x_2)\,;$$

$$\pi_i^1\equiv\frac{1+(-1)^i\,J_1}{2};\qquad \pi_j^2\equiv\frac{1+(-1)^j\,J_2}{2}. \tag{5}$$

$$\pi_{i,j}\equiv\pi_i^1\cdot\pi_j^2$$

Тоді оператори $\pi_{i,j}$ – ортопроектори в $L_2(\Omega)$ і одиничний оператор E: $L_2(\Omega)\to$ $L_2(\Omega)$ подамо у вигляді суми $E=\pi_{11}+\pi_{21}+\pi_{12}+\pi_{22}$,а простір $L_2(\Omega)$ у вигляді ортогональної суми: $L_2(\Omega)=\mathrm{H}_{11}\oplus\mathrm{H}_{12}\oplus\mathrm{H}_{21}\oplus\mathrm{H}_{22}$, $\qquad \mathrm{H}_{ij}\equiv\pi_{ij}\,L_2(\Omega)$.

Лема 2. Простори H_{ij} є інваріантними для оператора L^0 (i,j=1,2), тобто $L^0:D(L^0)\cap\mathrm{H}_{i\,j}\to\mathrm{H}_{i\,j}$.

При цьому

$$\sigma(\mathrm{L}^0)=\sigma_{11}\cup\sigma_{12}\cup\sigma_{21}\cup\sigma_{22}\,; \tag{6}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{L}^0)=\mathrm{V}_{11}\cup\mathrm{V}_{12}\cup\mathrm{V}_{21}\cup\mathrm{V}_{22}\,; \tag{7}$$

де $\sigma\,(L^0)$ – точковий спектр оператора L^0, $V(L^o)$ – система власних функцій оператора L_0. V_{ij} - множина власних функцій L^0 з $H_{i,j}(\Omega),(i,j=1,2)$.

Нехай $W_0(L)\subset W_2^4(\Omega)$ – замикання $D(L^0)$ за нормою простору $W_2^4(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 1. Оператор L^0 є ізоморфізмом $W_0(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

П.2.Властивості оператора L задачі (3),(4).

Спектральні властивості оператора задачі (3),(4) описує

Теорема 2. 1) σ (L) = σ (L^0);

2) Власні функції оператора L мають вигляд $V_{k,m} = v^0{}_{k,m} + \Delta v_{k,m}$, де $v^0_{k,m}$ – система власних функцій оператора L^0 задачі (1),(2), а $\Delta v_{k,m}$ – деякі відомі функції (m,k=1,2,…)..

3) Система $V(L)$ повна і мінімальна в $L_2(\Omega)$.

Систему V(L) можна побудувати конструктивно.Визначимо функції $\Delta v_{k,m}$ так:

а) $\Delta v_{k,m}(x) \equiv 0$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{11}(L^O)$ $(m = 2s; \quad k = 2p; \quad s, p \in N)$;

б) $\Delta v_{k,m}(x) \equiv \sum_{q=1}^{\infty} \varphi_q^{k,m}(x_1)\sqrt{2}\sin 2\pi q x_2$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{21}(L^0)$ $\quad (k = 2p-1;\ m = 2s;\ s, p \in N)$,

де $\varphi_q^{k,m}$ є розв'язком рівняння $(\frac{d^4}{dx_1^4} + \lambda_{0,q} - \lambda_{k,m})\varphi_q^{k,m}(x_1) = 0$.

в) $\quad \Delta v_{k,m}(x) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \chi_r^{k,m}(x_2)\sqrt{2}\sin 2\pi r x_1$, якщо

$$\lambda_{k,m} \in \sigma_{2,1}(L^0), \quad (k = 2p;\ m = 2s-1;\ s, p \in N) \quad ,$$

де $\chi_r^{k,m}(x_2)$ є розв'язком рівняння $(\frac{d^4}{dx_2^4} + \lambda_{r,0} - \lambda_{k,m})\chi_r^{k,m}(x_2)$.

г) $\Delta v_{k,m}(x) \equiv \Delta^1_{k,m} + \Delta^2_{k,m} + \Delta^3_{k,m} + \Delta^4_{k,m}$, якщо $\lambda_{k,m} \in \sigma_{22}(L^0)(k = 2r-1; m = 2s-1; r, s \in N)$, де

$$\Delta^1_{k,m} = \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^{k,m}(x_2)\sqrt{2}\sin \pi(2s-1)x_1 \ , \ \Delta^2_{k,m} = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^{k,m}(x_1)\sqrt{2}\sin \pi(2t-1)x_2$$

$$\Delta^3_{k,m} = \sum_{e=1}^{\infty} \beta_e^{k,m}(x_1)\sqrt{2}\sin 2\pi e x_2 \quad , \Delta^4_{k,m} = \sum_{f=1}^{\infty} \overline{\beta}_f^{k,m}(x_2)\sqrt{2}\sin 2\pi f x_1$$

і $\gamma_s^{k,m}(x_2), \alpha_t^{k,m}(x_1), \beta_e^{k,m}(x_1), \overline{\beta}_f^{k,m}(x_2)$ визначається рівняннями:

$$(\frac{d^4}{dx_2^4} + \lambda_{0,s} - \lambda_{k,m})\gamma_s^{k,m}(x_2) = 0, \ (\frac{d^4}{dx_1^4} + \lambda_{0,t} - \lambda_{k,m})\alpha_t^{k,m}(x_1) = 0$$

$$(\frac{d^4}{dx_1^4} + \lambda_{0,e} - \lambda_{k,m})\beta_e^{k,m}(x_1) = 0 \ , \ (\frac{d^4}{dx_2^4} + \lambda_{0,f} - \lambda_{k,m})\overline{\beta}_f^{k,m}(x_2) = 0 \ .$$

1. Каленюк П.И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных, К., 1993. 2. Баранецький Я. О. Нелокальна багатоточкова задача для диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку // Укр. мат. журн. 1990. 44. №9. С.1174-1181. 3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. К., 1984.