УДК 519.62

Є.М. Максимів, В.В. Складанівський, М.І. Худий, М.І. Томецький
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СУМІЖНИХ КВАДРАНТІВ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МЕРЕЖІ

У роботі зроблена оцінка паралельного методу суміжних квадрантів для розв'язування системи алгебраїчних рівнянь у локальній обчислювальній мережі.

In paper make estimation of parallel method adjacent quadrants for solving system of alqebrais equations in local computational network.

За означенням [1] обчислювальна мережа є слабко зв'язаним багатомашинним комплексом, в якому взаємозв'язок процесорів здійснюється каналами передачі даних. Хоча продуктивність роботи процесорів за останні десятиріччя зростає майже експоненціально, швидкість передачі даних між окремими машинами, об'єднаними в локальну обчислювальну мережу, залишається досить низькою (в межах 4800 кбіт/с). Тому в обчислювальній мережі доцільно розв'язувати способом розпаралелювання ті задачі, в яких мало передається даних між процесорами.

Розглянемо один із підходів до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку

$$Ax = B \tag{1}$$

ітераційним QI методом Якобі [2] з використанням двомашинної обчислювальної мережі

$$U^{(m+1)} = (W + Z)U^{(m)} + B, \tag{2}$$

де

$$A = X - W - Z,$$

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$-W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$-Z=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця X складена з елементів двох головних діагоналей невиродженої діагонально домінантної матриці A: $-W$ і $-Z$ складаються з пари протилежних квадрантів вихідної матриці A.

Через відсутність повної технічної інформації важко розробити реально діючу програму, яка працювала б у реальному часі на двох ПЕОМ, тому запропонований алгоритм емулює роботу двох ПЕОМ в одній програмі, що виконується на одному процесорі.

Розпаралелення QI методу Якобі можна подати так:

1. Кожне рівняння записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j + a_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

2. З умови діагональної домінантності матриці A за початкове значення можна взяти вектор

$$U=\left(\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_n}{a_{n,n}}\right). \tag{4}$$

3. QI розбиття дає змогу замінити систему рівнянь (3) $[n/2]$ системами розмірністю 2х2 вигляду

$$\begin{aligned} a_{i,i}u_i^{(m+1)} + a_{i,n-i+1}u_{n-i+1}^{(m+1)} &= c_i^{(m)}, \\ a_{n-i+1,i}u_i^{(m+1)} + a_{n-i+1,n-i+1}u_{n-i+1}^{(m+1)} &= c_{n-i+1}^{(m)}, \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$C^{(m)} = (W+Z)U^{(m)} + B.$$

Якщо n - непарне, то додається ще обчислення значення U_k, $(k=[n/2]+1)$.

4. Ітераційний процес припиняється, якщо виконується умова

$$\left|U_i^{(m)} - U_i^{(m+1)}\right| < \varepsilon_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Розв'язання $[n/2]$ систем можна здійснити на двох процесорах по $[n/4]$ систем на кожний процесор. Якщо кількість систем або рівнянь непарна, то їх можна закріпити за одним із процесорів. При досить великому n ця мала нерівномірність завантаження процесорів не буде суттєво впливати на ефективність алгоритму.

Отже, на першому процесорі будуть обчислюватися

$$u_{2i}, \; u_{n-2i+1}, \; i=1, [n/4],$$

а на другому

$$u_{2i-1}, \; u_{n-2i+2}, \; i=1, [n/4].$$

Крім того, якщо n непарне, то обчислюється

$$u_k, \; (k=[n/2]+1).$$

На кожній ітерації для обчислення $U^{(m+1)}$ потрібно знати значення всіх компонент попереднього вектора $U^{(m)}$. Тому перший і другий процесори повинні обмінятися обчисленими значеннями.

При роботі послідовного QI - методу на кожній ітерації також потрібно забезпечити всім процесорам повний вектор $U^{(m)}$. Тобто при двопроцесорному варіанті потрібно дві пересилки даних на ітерацію. Крім цього, при обчисленні компонент вектора $U^{(m+1)}$ для i-ї компоненти потрібно знати всі попередні. Тому на кожній ітерації буде відбуватися не дві, а $[n/4]\cdot 2$ пересилок, при кожній з яких буде передаватися два числа.

Оскільки матриця A додатково не аналізується, потрібно врахувати можливість розбіжності методу. Для цього вводиться число максимально допустимої кількості ітерацій M. Якщо за M ітерацій не отриманий розв'язок із заданою точністю, то ітераційний процес вважається розбіжним і робота завершується аварійно.

Якщо для всіх компонент на m-й ітерації виконується умова (6), то розв'язок вважається знайденим.

Для аналізу ефективності розпаралелювання алгоритму на два процесори оцінюється кількість операцій з урахуванням часу їх виконання. Нехай обмін даними між процесорами здійснюється за a тактів. Тоді прискорення S і ефективність E паралельного алгоритму обчислюється за такими формулами:

$$S = 2\frac{66n + 12n^2 + \lambda\left(30n^2 + 82n\right)}{60n + 18n_2 + \lambda\left(30n^2 + 82n + \alpha(n+2)\right)},$$

$$E = \frac{66n + 12n^2 + \lambda\left(30n^2 + 82n\right)}{60n + 18n^2 + \lambda\left(30n^2 + 82n + \alpha(n+2)\right)},$$

де λ – кількість ітерацій.

При $n = 100$ для ПЕОМ на базі *Intel* 486 *DX*2-66*S*=1.82, а *E*=0.96, що свідчить про досить високу ефективність реалізації алгоритму.

1. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М., 1986. 2. Ивенс Д. Системы параллельной обработки / Пер. с англ. М., 1986.

УДК 534.22

Л.П. Швець
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ДОСЛІДЖЕННЯ БЕЗМЕЖНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ ЗАДАЧ ДИФРАКЦІЇ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ НА ОБШИТИХ СВЕРДЛОВИНАХ, ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ

Розглянуто безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка виникає при розв'язуванні задачі дифракції плоскої хвилі на циліндричних свердловинах, обшитих тонкими пружними оболонками, які заповнені акустичною рідиною.