№ 11. С. 18-21. 2. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ / К., 1966. 3. *Плехотин А. П.* Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР. 1958. 123. № 4. С. 613-615. 4. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения / К., 1980. 5. *Курпель М.С.* Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1969. № 4. С. 303-306. 6. *Шувар Б.А.* Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах / Талин, 1981.

УДК 539.377

М.А. Сухорольський , Н.М. Тимошенко , С.І. Томецька
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ДЛЯ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ПОВЕРХНЕВОМУ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВАННІ

Сформульована динамічна задача про локальну дію температурного поля на оболонку. Для моделювання цієї дії використано дельтаподібні функції.

The dynamic problem for the temperature field's local effect upon the shell has been formulated. Delta-shaped functions have been used to model such an effect.

У цій роботі визначається розподіл нестаціонарного температурного поля T порожнистого циліндра скінченної довжини l при наявності джерел тепла, локалізованих на внутрішній і зовнішній поверхнях.

Задача зводиться до розв'язання рівняння [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{1}$$

при граничних умовах

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial r}-\gamma_1\left(T-\vartheta^-\right)=0 \quad \text{при} \quad r=r_1,\\ \frac{\partial T}{\partial r}+\gamma_2\left(T-\vartheta^+\right)=0 \quad \text{при} \quad r=r_2,\\ T=0 \qquad \text{при} \quad z=0, \quad z=l,\end{gathered} \tag{2}$$

де r – радіальна координата; t – час; r_1, r_2 – радіуси відповідно внутрішньої і зовнішньої циліндричних поверхонь; $\gamma_1=\frac{\alpha_1 r_2}{\lambda}$; $\gamma_2=\frac{\alpha_2 r_2}{\lambda}$; α_1, α_2 – коефіцієнти тепловіддачі відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях; λ – коефіцієнт теплопровідності; a – коефіцієнт температуропровідності; ϑ^-, ϑ^+ – температура середовища відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях.

Задачу (1), (2) аналогічно [1] зведено до двовимірної задачі

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial u}+\frac{1}{R}Q+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=0\,, \\ &\frac{\partial T}{\partial u}=Q; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &Q^- -\gamma_1\left(T-\vartheta^-\right)=0 \quad \text{при} \quad u=-h\,, \\ &Q^+ +\gamma_2\left(T-\vartheta^+\right)=0 \quad \text{при} \quad u=h\,, \\ &T=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad z=l\,, \end{aligned} \tag{4}$$

де $u=r-R$, R – радіус серединної поверхні; Q^-, Q^+ – значення функції Q відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях; $h=\dfrac{r_2-r_1}{2}$ – півтовщина циліндра.

Для шуканих функцій маємо такі апроксимаційні вирази:

$$T(u,\varphi,z,t)\cong T^0(\varphi,z,t)+T^1(\varphi,z,t)u,$$

$$Q(u,\varphi,z,t)\cong\begin{cases} Q^{\pm} & \text{при}\ \ u=\pm h \\ T^1 & \text{при}\ \ |u|\,\langle\, h. \end{cases}$$

Температуру середовища $\vartheta^{\mp}$ задаємо у вигляді імпульсних функцій [2]

$$\vartheta^{\mp}=\frac{I^{\mp}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}g_1\left(\frac{\left|\varphi-\varphi_0^{\mp}\right|}{\varepsilon_1}\right)g_2\left(\frac{\left|z-z_0^{\mp}\right|}{\varepsilon_2}\right)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\,, \tag{5}$$

де ε_1, ε_2, ε – параметри, що характеризують область локалізації імпульсів за координатами і часом; g_1, g_2 – функції, що задають закон розподілу температури середовища в областях локалізації; $I^-, I^+, \left(\varphi_0^-, z_0^-\right), \left(\varphi_0^+, z_0^+\right)$ – інтенсивності та точки локалізації джерел тепла відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях.

Проінтегрувавши по u в межах від $-h$ до h з вагою 1 і u та врахувавши граничні умови (4), отримаємо систему рівнянь відносно функцій T^0 і T^1

$$\begin{aligned} &\left(\gamma_1+\gamma_2\right)T^0-\frac{2h}{R^2}\frac{\partial^2 T^0}{\partial\varphi^2}-2h\frac{\partial^2 T^0}{\partial z^2}+\frac{2h}{a}\frac{\partial T^0}{\partial t}-h\left(\gamma_1-\gamma_2+\frac{2}{R}\right)T^1=\gamma_1\vartheta^-+\gamma_2\vartheta^+\,, \\ &\left(\gamma_1-\gamma_2\right)T^0+\frac{2h^2}{3R^2}\frac{\partial^2 T^1}{\partial\varphi^2}+\frac{2h^2}{3}\frac{\partial^2 T^1}{\partial z^2}-\frac{2h^2}{3a}\frac{\partial T^1}{\partial t}-h\left(\gamma_1+\gamma_2+\frac{2}{h}\right)T^1=\gamma_1\vartheta^--\gamma_2\vartheta^+\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Розв'язки системи рівнянь (6) шукаємо у вигляді сум тригонометричних рядів

$$\begin{aligned} &T^0=\sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty}T_{kn}^0\left(t\right)\cos k\varphi\,\sin\frac{n\pi}{l}z\,, \\ &T^1=\sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty}T_{kn}^1\left(t\right)\cos k\varphi\,\sin\frac{n\pi}{l}z\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Функції (5) представляємо теж у вигляді сум тригонометричних рядів

$$\vartheta^{\mp}=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\sum_{\substack{k=0\\n=1}}^{\infty}A_{kn}^{\mp}\cos k\varphi\,\sin\frac{n\pi}{l}z\,, \tag{8}$$

де $A_{kn}^{\mp}=\dfrac{2}{nl}I^{\mp}\varphi_1(k\varepsilon_1)\varphi_2\left(\dfrac{n\pi}{l}\varepsilon_2\right)\cos k\varphi_0^{\mp}\,\sin\dfrac{n\pi}{l}z_0^{\mp}$, $\varphi_1(k\varepsilon_1)=\int\limits_0^1 g_1(t)\cos k\varepsilon_1 t\,dt$,

$\varphi_2\left(\dfrac{n\pi}{l}\varepsilon_2\right)=\int\limits_0^1 g_2(t)\cos\dfrac{n\pi}{l}\varepsilon_2 t\,dt$.

Для відшукання коефіцієнтів T_{kn}^0, T_{kn}^1 із системи рівнянь (6) з врахуванням (7), (8) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}&(\gamma_1+\gamma_2)T_{kn}^0+\frac{2h}{R^2}k^2T_{kn}^0+2h\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_{kn}^0+\frac{2h}{a}\frac{dT_{kn}^0}{dt}-h\left(\gamma_1-\gamma_2+\frac{2}{R}\right)T_{kn}^1=\left(\gamma_1A_{kn}^-+\gamma_2A_{kn}^+\right)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}},\\&(\gamma_1-\gamma_2)T_{kn}^0-\frac{2h^2}{3R^2}k^2T_{kn}^1-\frac{2h^2}{3}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_{kn}^1-\frac{2h^2}{3a}\frac{dT_{kn}^1}{dt}-h\left(\gamma_1+\gamma_2+\frac{2}{h}\right)T_{kn}^1=\left(\gamma_1A_{kn}^--\gamma_2A_{kn}^+\right)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{9}$$

Розв'язок системи рівнянь (9) знайдемо за допомогою перетворення Лапласа по часу і використання умови $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$. Він має вигляд

$$\begin{aligned}T_{kn}^0(t)=&\left(\frac{a}{R}\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}+B_1\right)\frac{1}{c_1-\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\left[\frac{a}{R}\left(T_{kn}^{10}-\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\frac{1}{c_2-c_1}-\right.\\&\left.-\left(\frac{a}{R}\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}+B_1\right)\frac{1}{c_1-\frac{1}{\varepsilon}}+T_{kn}^{00}\right]e^{-c_1t}-\frac{a}{R}\left(T_{kn}^{10}-\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\frac{1}{c_2-c_1}e^{-c_2t},\end{aligned}\tag{10}$$

$$T_{kn}^1(t)=\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\left(T_{kn}^{10}-\frac{B_2}{c_2-\frac{1}{\varepsilon}}\right)e^{-c_2t},$$

де $B_1=\dfrac{a\gamma\left(A_{kn}^++A_{kn}^-\right)}{2h\varepsilon}$, $B_2=\dfrac{3a\gamma\left(A_{kn}^+-A_{kn}^-\right)}{2h^2\varepsilon}$,

$$c_1=\frac{a\gamma}{h}+\frac{a}{R^2}k^2+a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad c_2=\frac{3a\gamma}{h}+\frac{3a}{h^2}+\frac{a}{R^2}k^2+a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

$$T_{kn}^{00}=T_{kn}^0(0),\quad T_{kn}^{10}=T_{kn}^1(0).$$

Гранична функція (7) з врахуванням (10) при $\varepsilon_1\to0$, $\varepsilon_2\to0$, $\varepsilon\to0$ є узагальненим розв'язком задачі (3), (4). Цей розв'язок відповідає дії джерел тепла на поверхні циліндра, зосереджених в початковий момент часу у точках (φ_0^-, z_0^-), (φ_0^+, z_0^+).

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К., 1970. 2. Сухорольський М.А. Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення // Укр. мат. журн. 1997. № 5. С.706–714.