$H_q^n\left(D^p\right)$, який зображається рядом (20) і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Дії диференціальних виразів $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)$ у формулі (10) можна визначити так:

$$\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)V(t,x,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}}\int\limits_{R^s}\tilde{\varphi}_j(\alpha)exp\left[\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\right]V(t,x,\mu)d\alpha\,,\ j = 1,2,\ldots,n\,,$$

де $\tilde{\varphi}(\alpha)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$. У цьому випадку, враховуючи, що для досить гладкої функції $\exp\left[\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\Phi(\mu) = \Phi(\mu+\alpha)$, з формули (10) отримуємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1), (2)

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{R^s}\tilde{\varphi}_j(\alpha)exp[\alpha\cdot x]T_j(t,\alpha)d\alpha\,. \tag{21}$$

Для існування і єдиності розв'язку (21) задачі (1), (2) досить вимагати, щоб функції $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,n$, належали простору $L_2\left(R^s\right)$, а їх перетворення Фур'є були фінітними в R^s [8].

1. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными . К., 1984. 2. Пташник Б. И., Штабалюк П. И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. 1986. 22. № 4. С. 669 – 678. 3. Борок В. М. Классы корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. С. 1239 – 1242. 4. Нитребич З. М. Крайова задача в безмежній смузі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1994. 37. С. 16 – 21. 5. Нитребич З. М. Крайова задача для неоднорідного гіперболічного рівняння із частинними похідними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 346. С. 35 – 39. 6. Клюс І. С., Пташник Б. Й. Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1996. Вип. 40. С. 78 – 86. 7. Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н. Обобщеннный метод разделения переменных. К., 1993. 8. Дубинский Ю. А. Алгебра пседодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике// Успехи мат. наук. 1982.37. С. 97 – 159.

УДК 517.948

С.М. Ментинський
ІППММ НАН України ім. Я. С. Підстригача

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Побудовано алгоритм двосторонньої апроксимації розв'язків лінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння першого порядку.

Досліджено умови існування та єдності розв'язку та отримано оцінки збіжності алгоритму.

The two-sided process of sequential approximations to a solution of a boundary problem $\alpha x(0)+\beta x(T)=\gamma$, is constructed for the differential equation. $\frac{dx}{dt}=f(t,x(t))$. Are investigated of a condition of existence and uniqueness of a solution of a problem and the evaluations of convergence of process are obtained.

Йдеться про алгоритм двосторонньої апроксимації розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x(t)), \tag{1}$$

котрі задовольняли б лінійні крайові умови

$$\alpha x(0)+\beta x(T)=\gamma, \tag{2}$$

де $x(t)$ – елемент напівупорядкованого банахового простору B неперервних m-вимірних векторних функцій скалярного аргументу $t\in[0;T]$; $f(t,x(t)): D= \ =[0;T]\times[a;b]\to B$, $(a,b\in B)$; γ - m-вимірний сталий вектор; α і β - сталі матриці порядку $m\times m$.

Задачу (1),(2), за дещо інших припущень, досліджували в [1] (див. також [2, 3]).

Досліджуватимемо алгоритм наближеного розв'язання задачі (1),(2), що є однією з запропонованих М.С.Курпелем [4, 5,] модифікацій методу С.О.Чаплигіна. На відміну від основного варіанта методу, алгоритми такого типу (див. [4, 5, 6]) не вимагають диференційовності правої частини рівняння , проте, за певних умов, зберігають притаманну методу С.О.Чаплигіна надлінійну (зокрема квадратичну) швидкість збіжності ітерацій .

Еквівалентне до задачі (1),(2) інтегральне рівняння можна подати в такій формі:

$$x(t)=(\alpha+\beta)^{-1}\gamma+(\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int_0^t f(s,x(s))ds+(\alpha+\beta)^{-1}\beta\int_T^t f(s,x(s))ds. \tag{3}$$

Для побудови послідовних наближень до розв'язку задачі (1), (2) скористаємося оператором

$$\Lambda[\varphi(t),\psi(t)]=(\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int_0^t \varphi(s)ds+(\alpha+\beta)^{-1}\beta\int_T^t \psi(s)ds, \tag{4}$$

вважаючи, що

1)функція $f(t,x(t))$ неперервна, матриця $\alpha+\beta$ неособлива, а матриці $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha$ та $(\alpha+\beta)^{-1}\beta$ є додатними матрицями.

Зауважимо, що в цьому випадку оператор $\Lambda[\varphi(t),\psi(t)]$ буде ізотонним щодо $\varphi(t)$ і антитонним щодо $\psi(t)$.

Постулюємо виконання в області D таких умов:

2) Задана неперервна за сукупністю аргументів функція $F(t,y(t),z(t)):[0;T]\times\times[a;b]\times[a;b]\to B$,така, що при $t\in[0;T]$, $x\in[a;b]$

$$F(t,x(t),x(t))\equiv f(t,x(t)); \tag{5}$$

3) задані матриці $A_1(t,y(t),z(t))w$, $B_2(t,y(t),z(t))w$ неперервних за сукупністю аргументів, не зростаючих щодо y, не спадних щодо z дійсних функцій $a_{1,ij}(t,y(t),z(t))$, $b_{2,ij}(t,y(t),z(t))$, які, як оператори щодо w, є лінійними неперервними, додатними операторами, – такі , що при $\mathrm{y(t)} \le \mathrm{z(t)}$, $t \in [0;T]$функція $F(t,y(t),z(t))$ задовольняє нерівності

$$A_1(t,y(t),z(t))(z(t)-y(t)) \le F(t,z(t),x(t)) - F(t,y(t),x(t)), \tag{6}$$

$$F(t,x(t),z(t)) - F(t,x(t),y(t)) \le -B_2(t,y(t),z(t))(z(t)-y(t))., \tag{7}$$

4) кожна з нерівностей

$$w \ge \Lambda[(A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))w;-(A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))w], \tag{8}$$

$$w \ge \Lambda[(A_1(t,y,z)-B_2(t,y,z))w;(A_1(t,y,z)-B_2(t,y,z))w], \tag{9}$$

при $\mathrm{y} \le \mathrm{z}$, $t \in [0;T]$ тягне за собою правдивість нерівності $w \ge \theta$ (θ- нульовий елемент простору B)

5) функція $F(t,y(t),z(t))$ в області D задовольняє нерівність

$$|F(t,y(t),z(t))| \le M\ , \tag{10}$$

причому

$$a + TM \le (\alpha+\beta)^{-1}\gamma \le b - TM\ . \tag{11}$$

Визначимо послідовності функцій $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, як компоненти розв'язку системи

$$\begin{cases} y_{n+1}(t) = & \Lambda[A_1(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n);A_1(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n)] - \\ & -\Lambda[B_2(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n);B_2(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n)] + \\ & +\Lambda[F(t,y_n,z_n);F(t,z_n,y_n)] + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma; \\ z_{n+1}(t) = & \Lambda[A_1(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n);A_1(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n)] - \\ & -\Lambda[B_2(t,y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n);B_2(t,y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n)] + \\ & +\Lambda[F(t,z_n,y_n);F(t,y_n,z_n)] + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma; \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 1. Нехай виконані умови 1)-5), на $[a;b]$ існує хоча б один розв'язок $x^*(t)$ задачі (1),(2), а система інтегральних рівнянь (12) при кожному $n = 0,1,2,...$ має єдиний розв'язок, тоді для послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ справджуються співвідношення

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x^*(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \tag{13}$$
$$\text{при } t \in [0;T], \quad n = 0,1,2,...\ .$$

Доведення. ■ При $n = 0$ згідно з умовами 3) та 5) (враховуючи правдивість умов 1) та 2)) отримаємо нерівності

$$\begin{aligned} & y_1(t) - y_0(t) \ge \Lambda[A_1(t,y_0,z_0)(y_1-y_0);A_1(t,y_0,z_0)(z_1-z_0)] - \\ & -\Lambda[B_2(t,y_0,z_0)(z_1-z_0);B_2(t,y_0,z_0)(y_1-y_0)], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & z_0(t) - z_1(t) \ge \Lambda[A_1(t,y_0,z_0)(z_1-z_0);A_1(t,y_0,z_0)(y_1-y_0)] - \\ & -\Lambda[B_2(t,y_0,z_0)(z_1-z_0);B_2(t,y_0,z_0)(y_1-y_0)]. \end{aligned} \tag{15}$$

З отриманої після почленного додавання (14) та (15) нерівності на підставі умови 4) отримаємо співвідношення $y_1(t) - y_0(t) + z_0(t) - z_1(t) \ge \theta$. Враховуючи останню нерівність, з (14), (15) маємо

$$y_1(t) - y_0(t) \ge \theta,\ z_0(t) - z_1(t) \ge \theta. \tag{16}$$

Враховуючи, що розв'язок $x^*(t)$ задачі (1),(2) задовольняє рівність

$$x^*(t)=\Lambda\left[F(t,x^*(t),x^*(t));F(t,x^*(t),x^*(t))\right],$$

з умов 1), 2), 5) отримаємо $y_0(t)\le x^*(t)\le z_0(t)$, а також, використовуючи співвідношення (6), (7) та (16),

$$x^*(t)-y_1(t)\ge\Lambda\left[(A_1(t,y_0,z_0)-B_2(t,y_0,z_0))(x^*-y_1);(A_1(t,y_0,z_0)-B_2(t,y_0,z_0))(y_1-x^*)\right], \quad (17)$$

$$z_1(t)-x^*(t)\ge\Lambda\left[(A_1(t,y_0,z_0)-B_2(t,y_0,z_0))(z_1-x^*);(A_1(t,y_0,z_0)-B_2(t,y_0,z_0))(x^*-z_1)\right], \quad (18)$$

З останніх двох нерівностей та (16) отримаємо

$$y_0(t)\le y_1(t)\le x^*(t)\le z_1(t)\le z_0(t). \quad (19)$$

Отже, нерівності (13) справджуються при $n=0$.

Повторюючи наведені вище міркування з правдивості нерівностей (13) при $n=k$ отримаємо їх правдивість при $n=k+1$, що на основі принципу математичної індукції і доводить теорему. ■

Припустимо, що 6) задані матриці $A_2(t,y(t),z(t))w$, $B_1(t,y(t),z(t))w$ неперервних за сукупністю аргументів дійсних функцій $a_{2,ij}(t,y(t),z(t))$, $b_{1,ij}(t,y(t),z(t))$, які, як оператори щодо w, є лінійними неперервними, додатними операторами, причому з нерівності $y(t)\le z(t)$, ($t\in[0;T]$) випливають співвідношення

$$F(t,z(t),x(t))-F(t,y(t),x(t))\le -B_1(t,y(t),z(t))(z(t)-y(t)), \quad (20)$$

$$-A_2(t,y(t),z(t))(z(t)-y(t))\le F(t,x(t),z(t))-F(t,x(t),y(t)), \quad (21)$$

Теорема 2. Нехай в області D справджуються умови 1)-6), система інтегральних рівнянь (12) при кожному $n=0,1,2,...$ має єдиний розв’язок, і спектральний радіус матриці

$$Q=(E-M_1T)^{-1}\left[(\alpha+\beta)^{-1}((M_2-m_1)\alpha+(M_1-m_2)\beta)\right], \quad (22)$$

де
$$M_1=\max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}}\left\|A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z)\right\|,$$

$$m_1=\min_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}}\left\|A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z)\right\|,$$

$$M_2=\max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}}\left\|A_2(t,y,z)+B_1(t,y,z)\right\|,$$

$$m_2=\min_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}}\left\|A_2(t,y,z)+B_1(t,y,z)\right\|,$$

менший від одиниці. Тоді існує єдиний на $[a,b]$ розв’язок $x^*(t)$ задачі (1), (2), до якого, рівномірно щодо $t\in[0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ розв’язків системи (12).

Доведення. ■ З нерівностей (13), (20), (21) випливають оцінки

$$z_n(t)-y_n(t)\le(E-M_1T)^{-1}\left[(\alpha+\beta)^{-1}((M_2-m_1)\alpha+(M_1-m_2)\beta)\right](z_{n-1}(t)-y_{n-1}(t)), \quad (23)$$

$$z_n(t)-y_n(t)\le Q^n(z_0(t)-y_0(t)). \quad (24)$$

Своєю чергою, результати попередньої теореми, в силу принципу Шаудера, забезпечують існування крайнього на $[a,b]$ розв’язку $(y^*(t),z^*(t))$. Враховуючи оцінки (23), (24) та нерівності (13), отримаємо $y^*(t)=z^*(t)=x^*(t)$. Теорему доведено.■

1. Нестеренко Л. И. Об одном двустороннем методе решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. 1980.

№ 11. С. 18-21. 2. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ / К., 1966. 3. Плехотин А. П. Теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Докл. АН СССР. 1958. 123. № 4. С. 613-615. 4. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения / К., 1980. 5. Курпель М.С. Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1969. № 4. С. 303-306. 6. Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах / Талин, 1981.

УДК 539.377

М.А. Сухорольський , Н.М. Тимошенко , С.І. Томецька
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ДЛЯ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ПОВЕРХНЕВОМУ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВАННІ

Сформульована динамічна задача про локальну дію температурного поля на оболонку. Для моделювання цієї дії використано дельтаподібні функції.

The dynamic problem for the temperature field's local effect upon the shell has been formulated. Delta-shaped functions have been used to model such an effect.

У цій роботі визначається розподіл нестаціонарного температурного поля T порожнистого циліндра скінченної довжини l при наявності джерел тепла, локалізованих на внутрішній і зовнішній поверхнях.

Задача зводиться до розв'язання рівняння [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{1}$$

при граничних умовах

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial r}-\gamma_1\left(T-\vartheta^-\right)=0 \quad \text{при} \quad r=r_1,\\ \frac{\partial T}{\partial r}+\gamma_2\left(T-\vartheta^+\right)=0 \quad \text{при} \quad r=r_2,\\ T=0 \qquad \text{при} \quad z=0, \quad z=l,\end{gathered} \tag{2}$$

де r – радіальна координата; t – час; r_1, r_2 – радіуси відповідно внутрішньої і зовнішньої циліндричних поверхонь; $\gamma_1=\dfrac{\alpha_1 r_2}{\lambda}$; $\gamma_2=\dfrac{\alpha_2 r_2}{\lambda}$; α_1,α_2 – коефіцієнти тепловіддачі відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях; λ – коефіцієнт теплопровідності; a – коефіцієнт температуропровідності; ϑ^-,ϑ^+ – температура середовища відповідно на внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях.