УДК 517. 95

Я.М. Плешівський
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ПОЛІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

На підставі узагальненої схеми відокремлення змінних пропонується операційний метод побудови розв’язку багатоточкової задачі для неоднорідної полілінійної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними. Введене поняття мінімального полінома матриці, залежної від вектор-параметра, дозволяє будувати розв’язок задачі в ефективній формі.

On the basis of a generalized separation of variables scheme we propose an operator method of the solution construction of the multipoint problem for inhomogeneous polylinear system of partial differential equations. Introduced concept of minimal polynomial of the matrix, depending on the vector - parameter, allows to construct the solution of the problem in effective form.

У шарі $t \in (0,\xi)$, $x \in R^s$ вивчається багатоточкова задача

$$L^m\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) \equiv \left(E_n\frac{\partial}{\partial t} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^m U(t,x) = F(t,x), \tag{1}$$

$$U(t_k,x) = 0\,,\ k = \overline{1,m}\,, \tag{2}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриця порядку n, елементами якої є довільні диференціальні вирази $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$, зі сталими коефіцієнтами та цілими символами $a_{ij}(\nu)$, $i,j = \overline{1,n}$; $U(t,x) = (U_1(t,x),U_2(t,x),\ldots,U_n(t,x))^\tau$; $F(t,x) = (F_1(t,x),F_2(t,x),\ldots,F_n(t,x))^\tau$; $n,m,s \in N$; τ – символ транспонування; E_n – одинична матриця порядку n; $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le \xi < \infty$.

Задачу (1), (2) для $m = 1$ вивчали у роботах [1, 2], а для випадку $n = 1$ – у роботі [3] . У цій роботі розглядається випадок, коли $m,n \in N \setminus \{1\}$.

У [1] при вивченні задачі (1), (2), у якій $m = 1$, було показано доцільність використання для побудови розв’язку задачі так званого мінімального полінома матриці $A(\nu)$. Використаємо аналогічний підхід до розв’язання задачі (1), (2).

Для матриці $A(\nu) = \left\|a_{ij}(\nu)\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, де $\nu \in C^s$, розглянемо її мінімальний поліном, тобто нетривіальний поліном вигляду

$$\psi(\lambda,\nu)=\lambda^q+\sum_{j=1}^{q-1}\eta_j(\nu)\lambda^{q-j}\,, \qquad (3)$$

для якого виконуються такі умови:

а) $\forall\,\nu\in \mathrm{C}^s\;\; \psi(\mathrm{A}(\nu),\nu)\equiv 0$;

б) $\eta_j(\nu),\;\; j=\overline{1,q}$, – цілі функції;

в) якщо $\psi_1(\lambda,\nu)$ – поліном з властивостями а), б), тоді $deg\,\psi_1(\lambda,\nu)\ge q$.

Зауважимо , що такий мінімальний поліном матриці A(v) завжди існує, визначений однозначно і має степінь q, не вищий за n.

Розглянемо також зведену приєднану матрицю $C(\lambda,\nu)$ для характеристичної матриці $L(\lambda,\nu)$, тобто матрицю $C(\lambda,\nu)$, яка задовольняє рівності

$$C(\lambda,\nu)L(\lambda,\nu)=L(\lambda,\nu)C(\lambda,\nu)=E_n\psi(\lambda,\nu). \qquad (4)$$

Нехай $V(t,\nu)$ – розв'язок такої задачі Коші

$$\psi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V(t,\nu)=0\,, \qquad (5)$$

$$\frac{d^jV}{dt^j}(0,\nu)=\delta_{j,q-1}\,,\;\; j=\overline{0,q-1}, \qquad (6)$$

де $\delta_{j,q-1}$ – символ Кронеккера;

$$\theta_W=\begin{cases}\max\limits_{j=\overline{1,q}}\left\{\dfrac{deg\,\eta_j(\nu)}{j}\right\}, \text{якщо } a_{ij}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)-\text{диференціальні поліноми}, i,j=\overline{1,n},\\[2ex] \infty-\text{в інших випадках,}\end{cases} \qquad (7)$$

де $deg\,\eta_j(\nu)$ – степінь полінома $\eta_j(\nu)$ за сукупністю змінних.

Позначимо через D_Θ клас аналітичних на R^s функцій, що є звуженнями на R^s цілих функцій $\varphi(z)$, які є :

- цілими функціями порядку, нижчого за $\Theta/(\Theta-1)$ за сукупністю змінних, якщо $1<\Theta<\infty$;
- цілими функціями довільного скінченного порядку за сукупністю змінних, якщо $\Theta=1$;
- цілими функціями довільного порядку, якщо $0\le\Theta<1$;
- цілими функціями експоненціального типу, якщо $\Theta=\infty$.

Теорема. Нехай у системі рівнянь (1) $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриця порядку $n\in N\setminus\{1\}$, елементами якої є довільні диференціальні вирази, символами яких є цілі функції. Якщо для кожного $i=\overline{1,n}$ функція $F_i(t,x)$ як функція змінної t є аналітичною на R^1 функцією, комплексне продовження в $\mathbf{C}^1$ якої є цілою функцією довільного скінченного порядку, а для фіксованого $t\in(0,\xi)$ $F_i(t,x)\in D_\Theta$, тоді у класі вектор-функцій $U(t,x)$, компоненти

$U_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, яких для кожного фіксованого $t\in(0,\xi)$ належать до D_Θ, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Цей розв'язок можна знайти за формулою

$$U(t,x)=\left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{exp[\nu\cdot x]\Phi(\lambda,\nu,t)\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau, \tag{8}$$

де

$$\Phi(\lambda,\nu,t)=\frac{\left(C^\tau(\lambda,\nu)\right)^m}{\psi^m(\lambda,\nu)}\left\{E_n e^{\lambda t}-\sum_{i=1}^m \omega_i(t)e^{\lambda t_i}C^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left(E_n V(t-t_i,\nu)\right)\right\},$$

$$\omega_i(t)=\frac{\prod\limits_{j=1}^m (t-t_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m (t_i-t_j)},\ i=\overline{1,m},\quad \nu\cdot x=\sum_{i=1}^s \nu_i x_i,\quad \frac{\partial}{\partial\nu}=\left(\frac{\partial}{\partial\nu_1},\frac{\partial}{\partial\nu_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial\nu_s}\right).$$

Доведення. За системою рівнянь (1) знайдемо Θ відповідно до формули (7). Припустимо, що $F_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, належать до виділеного в умові теореми класу аналітичних на R^{s+1} функцій. Диференціальні вирази, взагалі кажучи, безмежного порядку $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $i=\overline{1,n}$, визначимо через відповідні ряди Маклорена, формально замінюючи t на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$.

Цілком подібно, як у роботах [1,2], на основі рівностей (4)-(6) неважко довести, що матриця $\Phi^\tau(\lambda,\nu,t)$ є розв'язком матричного диференціального рівняння

$$L^m\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Phi^\tau(\lambda,\nu,t)=E_n\,exp[\lambda t] \tag{9}$$

і задовольняє тривіальні m-точкові умови

$$\Phi^\tau(\lambda,\nu,t_k)=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{10}$$

З того , що матриця $\Phi^\tau(\lambda,\nu,t)$ є розв'язком задачі (9), (10) випливає, що вектор-функція (8) є формальним розв'язком задачі (1), (2)

$$L^m\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=$$

$$=L^m\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{exp[\nu\cdot x]\Phi(\lambda,\nu,t)\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau=$$

$$=\left[F^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{exp[\nu\cdot x]\left(L^m\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Phi^\tau(\lambda,\nu,t)\right)^\tau\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^\tau=$$

$$=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{E_m\,exp[\lambda t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^{\tau}=$$

$$=\left[F^{\tau}(t,x)\left\{E_m\,exp[\lambda t+\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^{\tau}=F(t,x);$$

$$U(t_k,x)=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{exp[\nu\cdot x]\Phi(\lambda,\nu,t_k)\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}\right]^{\tau}=0,\ k=\overline{1,m}.$$

Елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)$, крім того, є цілими відносно $\lambda,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ функціями. Цей факт доводиться аналогічно, як у [2]. Ці функції мають, очевидно, перший порядок за змінною λ та той же ж порядок за ν, що і функція $V(t,\nu)$. Як розв'язок задачі Коші (5),(6) функція $V(t,\nu)$ є цілою відносно $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ (коефіцієнти рівняння (5) є цілими відносно ν) за теоремою Пуанкаре про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів [4]. Її порядок за сукупністю параметрів $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ не перевищує числа Θ, що знаходиться з умови (7) [5]. Отже, елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)$ є цілими відносно $\lambda,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ функціями, причому першого порядку за λ та порядку, не вище Θ, за сукупністю $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$.

Щоб дія диференціальних виразів безмежного порядку $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $i=\overline{1,n}$, на відповідні цілі відносно $\lambda,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ функції у формулі (8) була визначена коректно, на символи цих виразів, тобто на праві частини системи рівнянь (1), треба крім аналітичності накладати певні обмеження щодо їх зростання на безмежності. Саме, досить вимагати, щоб $\forall t\in(0,\xi)$ $\forall i=\overline{1,n}$ $F_i(t,x)\in D_\Theta$ і $\forall x\in R^s$ $\forall i=\overline{1,n}$ $F_i(t,x)$ були аналітичними на R^1 функціями, комплексні продовження в C^1 яких є цілими функціями довільного скінченного порядку [6,7]. Для функцій $F_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, взятих з такого класу функцій, результат дій $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $i=\overline{1,n}$, на відповідні цілі функції згідно з формулою (8) належатиме для довільного $t\in(0,\xi)$ до D_Θ [6,7].

Вектор-функція (8) допускає деференціювання скінченного порядку за змінною t та необхідного порядку за змінними $x_1,x_2,\ldots,x_s$. Це випливає з того, що елементи матриці $\Phi(\lambda,\nu,t)exp[\nu\cdot x]$ після такого диференціювання є знову цілими функціями відносно $\lambda,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$, причому першого порядку за параметром λ та порядку не вище Θ за сукупністю параметрів $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$. Тому дії диференціальних виразів $F_i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $i=\overline{1,n}$, на відповідні продиференційовані функції будуть теж визначені коректно.

Отже, клас вектор-функцій, компоненти яких для кожного фіксованого $t\in(0,\xi)$ належать до D_Θ, є класом існування розв'язку (8) задачі (1),(2).

Задачу (1),(2) можна звести до m- точкової задачі для системи mn диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом. При цьому одержана система рівнянь матиме зведений порядок, який дорівнює Θ, а відповідна m-точкова задача матиме безмежний тип (поняття типу крайової задачі введено у роботі [8]). Використовуючи результати роботи [9] щодо класу єдиності розв'язку зведеної задачі і переносячи їх для задачі (1),(2), одержуємо, що виділений клас вектор-функцій є не лише класом існування, але й класом єдиності розв'язку задачі (1),(2). Теорема доведена.

1. Каленюк П.І., Нитребич З.М., Сохан П.Л. Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи рівнянь із частинними похідними безмежного порядку. Львів , 1995. 44 с. (Препр. / НАН України. ІППММ; №1 - 95). 2. Нитребич З.М., Сохан П.Л. Операційний метод розв'язання задачі Коші для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Матеріали міжнар. матем. конф., присв. пам'яті Г.Гана. Чернівці, 1995. С. 254-261. 3. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980. 5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958. 6. Леонтьев А.Ф. Обобщение рядов экспонент. М., 1981. 7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958. 8. Борок В.М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1969. 79. № 2. С. 293-304. 9. Борок В.М., Перельман М.А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. 1973. №8. С. 29-34.

УДК 517.95

І. С. Клюс, З. М. Нитребич
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра математики і програмування

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЩО РОЗКЛАДАЄТЬСЯ В ДОБУТОК ЛІНІЙНИХ ВІДНОСНО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ МНОЖНИКІВ

На основі узагальненої схеми методу відокремлення змінних досліджено багатоточкову задачу в безмежному шарі для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників. Побудовано розв'язок задачі та виділено класи однозначної розв'язності.

On the basis of generalized separation of variables method the multipoint problem for the partial differential equation, which expand in product of linear over differentiation factors at the infinite layer is investigated. The solution of the problem is constructed and the class of univalent solvability is chosen.