$$\left|\alpha(s)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|A_n\right|}{\sigma_n + s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left|A_n\right|\int_0^{\infty} e^{-\sigma_n t} e^{-st}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|c_n\right|}{\left|g(\sigma_n)\right|}\int_0^{\infty}\sigma_n^{1/2} e^{-\sigma_n t} e^{-st}\,dt \le$$

$$\le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^{\infty} e^{-2st}\,dt\right)^{1/2} \le \frac{C}{\sqrt{s}},\quad 0 < s < 1$$

Отже, $\alpha \in H$. Оператор $\tilde{T}$ побудовано. Вибір ваги $\rho(s) = \sqrt{s}$ зумовлений тим, що оператор $\tilde{T}$ тоді є Фур'є-образом максимального оператора, породженого виразом $l(y) = -y'' + (y, \mathrm{v})_{L^2(0,\,\infty)}u$ у просторі оператор S відповідає граничній умові $y(0) = 0$. Зрозуміло, що всі значення ззовні півосі $[0,\infty)$ є власними для максимального оператора, а на півосі $[0,\infty)$ знаходяться неперевний спектр і нескінченна послідовність власних значень $\{\sigma_n\}$.

Підкреслимо,що теорему 2 можна застосовувати у випадку звичайного диференціального оператора (а не максимального). У наведеному вище прикладі такий оператор виникає при введенні умови $y(0) = 0$ або деякої іншої граничної умови.

1. Набоко С. Н. О несамосопряженной модели Фридрихса // Записки ЛОМИ 1974. №39. С.40-58. 2. Микитюк Я. В. Свойства одного класса несамосопряженных операторов // Функ. анал. и прил. 1981. Т.15. №4. С. 85-86. 3. Павлов Б. С. Петрас С. В. О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения // Функ. анал. и прил. 1970. Т.4. №2. С.54-61.4. Simon B. Spectral analysis of rank one perturbation and applications // CRM Proccedings and Lecture Notes. 1995. T.8. C.109-149. 5. Гохберг И. Ц. Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / М. 1965. 6. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига /М. 1980. 6.Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига / М. 1980. 7. Черемних Є. В. Про граничні значення резольвенти на неперервному спектрі. // Вісн. ДУ "Львівська політехніка" 1997. №320. С. 196-203.

УДК 517.95

Н.В. Пабирівська
Національний університет ім. Ів. Франка

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ

Встановлено умови однозначного визначення двох залежних від часу коефіцієнтів в оберненій задачі для параболічного рівняння.

Conditions for unique determination of time dependent coefficients in inverse problem for parabolic equation.

Вступ

Серед обернених задач для параболічних рівнянь особливе місце займають задачі визначення старших коефіцієнтів рівнянь. Специфіка цих задач полягає в неможливості повного визначення невідомих коефіцієнтів, тобто знаходження коефіцієнтів, що залежать від всіх незалежних змінних. Саме цим пояснюється існування різних підходів до формулювання та розв’язання таких задач. Відмінність як за методами, так і за результатами простежується у випадках, де невідомі коефіцієнти залежать лише від просторових змінних [1-3] або лише від часу [4-6]. У роботах [7,8] невідомий старший коефіцієнт рівняння залежав від частини просторових змінних і часу. Подальший розвиток цього напряму полягав у припущенні, що старший коефіцієнт залежить від всіх аргументів, але залежність від частини змінних, наприклад просторових, вважалась заданою [9,10].

У статті старший коефіцієнт в параболічному рівнянні шукається у вигляді лінійної за просторовою змінною функції з двома невідомими коефіцієнтами, що залежать від часу.

1. Формулювання задачі

В області $\Omega_T = \{(x,t): 0 < x < h; 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = (a(t)x + b(t))u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ і $b(t)$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

та крайовими умовами другого роду

$$u_x(0,t) = \nu_1(t),\ u_x(h,t) = \nu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Визначимо коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ та розв‘язок $u(x,t)$ задачі (1) – (3) так, щоб задовольнялись умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Під розв’язком оберненої задачі (1) - (4) будемо розуміти трійку функцій $(a(t),c(t),u(x,t))$ з класу $\left(H^{\gamma/2}[0,T]\right)^2 \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T),\ 0<\gamma<1$, що задовольняють умови (1)-(4), при цьому $a(t)x + b(t) > 0$ на множині $\overline{\Omega}$.

2. Існування розв'язку

Теорема 1. Нехай виконуються умови

1) $\varphi(x) \in H^{2+\gamma}[0,h]$, $\nu_i(t), \mu_i(t) \in H^{1+\gamma/2}[0,T]$, $i = 1,2$, $f(x,t) \in H^{1+\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$;

2) $\mu_1'(t) - f(0,t) > 0$, $\mu_2'(t) - f(h,t) > 0, t \in [0,T], \varphi''(x) > 0, x \in [0,h]$;

3) $\nu_1(0) = \varphi'(0)$, $\nu_2(0) = \varphi'(h)$, $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(h)$.

Тоді існує розв’язк задачі (1) - (4) при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, де число $t_0 \in (0,T]$ визначається вихідними даними задачі.

Доведення. Припускаючи, що $(a(t),c(t),u(x,t))$ – розв’язок задачі (1) - (4) , покладаючи в рівнянні (1) $x = 0$ і $x = h$ та використовуючи умови (3), (4), приходимо до співвідношень

$$\mu_1'(t) = b(t)u_{xx}(0,t) + f(0,t), \tag{5}$$

$$\mu_2'(t) = c(t)u_{xx}(h,t) + f(h,t), \tag{6}$$

де

$$c(t) = a(t)h + b(t). \tag{7}$$

Задача (1)-(4) знаходження коефіцієнтів $a(t)$ і $b(t)$ еквівалентна задачі знаходження функцій $b(t)$ та $c(t)$, причому виконання умови $a(t)x + b(t) > 0$ можна забезпечити, вимагаючи, щоб $b(t)>0$ та $c(t)>0$. Покажемо, що під час виконання умов теореми функції $b(t)$ та $c(t)$ є додатними на деякому проміжку $[0,t_0]$, а рівності (5), (6) зводяться до вигляду

$$b(t)=\frac{\mu_1'(t)-f(0,t)}{u_{xx}(0,t)}, \tag{8}$$

$$c(t)=\frac{\mu_2'(t)-f(h,t)}{u_{xx}(h,t)}, \tag{9}$$

де $u(x,t)$ – розв'язок задачі (1), (2), (4). Друга похідна цього розв'язку за змінною x при $x=0$ та $x=h$ матиме вигляд

$$u_{xx}(ih,t)=\int_0^h \varphi''(\xi)G_{2i}(ih,t,\xi,0)d\xi-\int_0^t \mu_1'(\tau)G_{2i}(ih,t,0,\tau)d\tau+\int_0^t \mu_2(\tau)G_{2i}(ih,t,h,\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2i\xi}(ih,t,\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^h a(\tau)(\xi-ih)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{2i_{xx}}(ih,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, i=0,1, \tag{10}$$

де $G_{2i}(x,t,\xi,\tau),\ i=0,1$ – функція Гріна другої крайової задачі відповідно для таких рівнянь теплопровідності:

$$u_t=b(t)u_{xx} \quad \text{та} \quad u_t=(a(t)h+b(t))u_{xx}.$$

Припускаючи, що $t_0, 0<t_0<T$, настільке мале, що функції $u_{xx}(0,t)$та $u_{xx}(h,t)$ із співвідношення (10) можна оцінити знизу через $\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)/2$, із рівнянь (8), (9) отримуємо

$$b(t)<B_1, \qquad c(t)<C_1, \qquad t\in[0,t_0], \tag{11}$$

де

$$B_1=\frac{2\max\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))}{\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)}, \qquad C_1=\frac{2\max\limits_{[0,T]}(\mu_2'(t)-f(h,t))}{\min\limits_{[0,h]}\varphi''(x)}.$$

Для оцінки невідомих коефіцієнтів знизу спочатку оцінюємо за методом Бернштейна [11] другі похідні розв'язку $u(x,t)$ задачі (1), (2), (4) при $x=0$ та $x=h$ зверху, тобто встановлюємо оцінки

$$u_{xx}(0,t)\le C_2, \quad u_{xx}(h,t)\le C_3, \qquad t\in[0,t_0]. \tag{12}$$

Використовуючи (12), із системи рівнянь (8), (9) отримаємо оцінки невідомих коефіцієнтів $b(t)$ та $c(t)$ знизу

$$b(t)\ge B_2, \qquad c(t)\ge C_5, \qquad t\in[0,t_0]. \tag{13}$$

де $B_2=\dfrac{\min\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t)-f(0,t))}{C_2}, \quad C_4=\dfrac{\min\limits_{[0,T]}(\mu_2'(t)-f(h,t))}{C_3}.$

Спираючись на встановлені оцінки, з (10) визначаємо довжину проміжку $[0,t_0]$. У результаті отримаємо, що число t_0 повинно задовольняти нерівність

$$C_{5i}+C_{6i}\sqrt{t_0}+C_{7i}t_0\ge 0, \quad t\in[0,t_0], \quad i=1,2, \tag{14}$$

де константи $C_{i,j}$, $i = 5,6,7$, $j = 1,2$, залежать лише від вихідних даних задачі.

Оцінки розв'язків системи рівнянь (8), (9) встановлено.

Позначимо $\psi = (b,c)$ та $\mathrm{M} = \left\{ (b,c) \in (C[0,t_0])^2 : B_2 \le b(t) \le B_1, C_4 \le c(t) \le C_1 \right\}$.
Систему рівнянь (8), (9) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$\vec{\psi} = P\vec{\psi} ,$$

де оператор P переводить M в M. Перевірка того, що оператор P є цілком неперервним, проводиться аналогічно роботі [12], що, в силу теореми Шаудера , дає існування неперервного розв'язку системи рівнянь (8), (9). Із умов теореми випливає також, що $a(t), b(t) \in \mathrm{H}^{\gamma/2}[0,t_0]$. Тоді $u(x,t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{t_0})$ і ми отримуємо розв'язок задачі (1)-(4), визначений при $t \in [0,t_0]$, де число t_0, $0 < t_0 \le T$, задовольняє умови (14).

3. Єдиність розв'язку

Теорема 2. Розв'язок задачі (1)-(4) єдиний за умови, що

$$\left(\mu_1'(t) - f(0,t)\right)\left(\mu_2'(t) - f(h,t)\right) \ne 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки цієї задачі $\left(a_i(t), b_i(t), u_i(x,t)\right)$, $(i = 1,2)$. Для їх різниці $l(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $m(t) = b_1(t) - b_2(t)$, $\upsilon(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримуємо задачу знаходження невідомого джерела:

$$\upsilon_t = \left(a_1(t)x + b_1(t)\right)\upsilon_{xx} + \left(l(t)x + m(t)\right)u_{2xx} \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{16}$$

$$\upsilon(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \tag{17}$$

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{18}$$

$$\upsilon_x(0,t) = \upsilon_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{19}$$

Позначаючи через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (16), (17), (19), подамо її розв'язок у вигляді

$$\upsilon(x,t) = \int_0^t \int_0^h \left(l(\tau)\xi + m(\tau)\right) u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) G(x,t,\xi,\tau) d\xi d\tau . \tag{20}$$

Покладаючи в рівнянні (16) $x = 0$, $x = h$ та використовуючи умови (18), (19), приходимо до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}\left(l(t)ih + m(t)\right)u_{xx}(ih,t) = -\left(a_1(t)ih + b_1(t)\right)\times \\ \times \int_0^t \int_0^h \left(l(\tau)\xi + m(\tau)\right) u_{2\xi\xi}(\xi,\tau) G_{xx}(ih,t,\xi,\tau) d\xi d\tau, \ i = 0,1.\end{aligned} \tag{21}$$

Враховуючи те, що $u_2(x,t)$ є розв'язком задачі (1) - (4), знаходимо

$$u_{2xx}(0,t) u_{2xx}(h,t) = \frac{1}{b(t)\left(a(t)h + b(t)\right)} (\mu_1'(t) - f(0,t))(\mu_2'(t) - f(h,t)) \ne 0, \ t \in [0,T].$$

Тоді систему рівнянь (21) можна звести до системи однорідних рівнянь Вольтрерра другого роду

$$l(t)=\int_0^t (l(\tau)K_{11}(t,\tau)+m(\tau)K_{12}(t,\tau))d\tau,$$

$$m(t)=\int_0^t (l(\tau)K_{21}(t,\tau)+m(\tau)K_{22}(t,\tau))d\tau, t\in[0,T],$$

з ядрами $K_{ij}(t,\tau), i,j=1,2,$ що мають інтегровні особливості [13]. Отже, розв'язок $(l(t),m(t))$ системи (21) – тривіальний, і теорема доведена.

1. Исаков В.М. Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т.263. № 6. С.1296–1299. 2. Прилепко А.И., Костин А.Е. Об обратных задачах определения коэффициента в параболических уравнениях I // Сиб.мат.журнал. 1992. Т.33. № 3. С.146–155. 3. Прилепко А.И., Костин А.Е. Об обратных задачах определения коэффициента в параболических уравнениях II // Сиб.мат.журнал. 1993. Т.34. № 5. С.147–162. 4. Jones B.F. The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I. Existence and uniqueness // J.Math.Mech. 1962. Vol.11. №6. P.907-918. 5. Canon I.R., Rundell W. Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // J.Math.Anal.Appl. 1991. Vol.160. P.572-582. 6. Иванчов Н.И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Укр.мат.журнал. 1993. Т.45. №8. С.1066-1071. 7. Безнощенко Н. Я. Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения. 1975. Т.11. № 1. С.19-26. 8. Безнощенко Н. Я. Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения. // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. № 11. С.1908-1915. 9. Jones B.F. Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations // Comm. Pure Appl . Math. 1963. Vol.16. P.33 – 44. 10. Іванчов М.І. Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні // Укр.мат.журнал. 2000. Т.52. № 3. С.32-335. 11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 12. ИванчовН.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб.мат.журнал. 1998. Т.39. № 3. С.539-550. 13. Канторович Л.В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1977.