Підставляючи (7), (8), (9) в (6), переконуємося в справедливості твердження

Теорема 2. *Нехай оператор Урисона володіє властивістю, що*

$$\frac{\partial F\left(t,\theta\, H(\cdot - z)\right)}{\partial z} = w(t,z,\theta)$$

обмежена функція на $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, *тоді* $\forall\ x(z)\in\Phi_2$

$$\left\|F(t,x(\cdot)) - B_n(t,F,x(\cdot))\right\|_{L_p[0,1]} \le M_3\left\{\int_0^1\left[\max_{0\le z\le 1}\omega_2\left(F_1(t,z,\cdot);\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^p dt\right\}^{1/p}.$$

1. Демків І.І. Про наближення оператора Урисона операторними поліномами типу Бернштейна // Вісн. Львів. ун-ту. 2000. Вип. 2. С. 23-28. 2. Makarov V.L., Khlobystov V.V. On the identification of non-linear operators and its application. 1987. BEM IX, Vol.1. Pp. 43-58 3. Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости / Пер. с болгар., М., 1988. 4.Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 5. Bojanic R. Rate of Convergence of Bernstein Polynomials for Functions with Derivatives of Bounded Variation // J. Mathem. Analysis and Applications, 1989. 141. P. 136-151.

УДК 621.372.061

П.В. Тимощук
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра радіотехнічних пристроїв

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ ДЕТЕКТОРА АМ-СИГНАЛІВ

Побудовано аналогову та дискретну математичні макромоделі нелінійного детектора амплітудно-модульованих гармонічних сигналів за зовнішніми часовими характеристиками. Аналогова макромодель визначається у вигляді неявного алгебро-диференціального рівняння. Дискретна макромодель отримується в формі відповідної різницевої схеми.

The analogue and discrete mathematical macromodels of nonlinear amplitude-modulated harmonic signals detector at the external time characteristics base has been built. The analogue macromodel is determined in an implicit algebra-differential equation aspect. The discrete macromodel is obtained in an appropriate difference diagram form.

Відомі методи розв'язання задачі визначення математичних макромоделей детекторів АМ- сигналів. Так, наприклад, у роботі [2] для цього сконструйовано оператор лінійного детектора в області неперервного часу та неперервних станів з подальшим переходом до дискретного часу. Безпосередню побудову за часовими характеристиками детектора рекурсивних макромоделей в формі різницевих рівнянь передбачає підхід з [1]. Методи з [3] грунтуються на різних евристичних прийомах. Побудова макромоделей цифрових нерекурсивних детекторів у частотній області в межах розв'язання задачі відновлення сигналів на підставі теорії розщеплення сигналів розглядається в [4].

Існуючі методи передбачають конструювання макромоделей детекторів, які під час зміни амплітуди або (та) частоти сигналів потребують зміни своєї структури або параметрів. Разом з тим, в радіоелектроніці, вимірювальній техніці та інших галузях необхідні схеми прецизійних амплітудо- та частотонезалежних детекторів сигналів. Тому актуальною залишається задача побудови детекторів АМ-гармонічних сигналів, які без змін своєї структури та параметрів можуть з високою точністю функціонувати в широких діапазонах зміни амплітуд та частот сигналів. У цій роботі розв'язується задача побудови аналогових та дискретних математичних макромоделей таких детекторів.

На відміну від відомих методів побудуємо аналогову математичну макромодель нелінійного детектора АМ-гармонічних сигналів у вигляді неявного алгебро-диференціального рівняння

$$F\left[x(t), x`(t),..., x^m(t), y(t), y`(t),..., y^n(t)\right] = 0, \tag{1}$$

де $x^m(t)$, $y^n(t)$ – часові залежності m-ї похідної зовнішньої дії та n-ї похідної відповідної реакції (напруги або струму) кола, F[...] – нелінійна функція всіх аргументів, яка явно не залежить від часу [5].

Припустимо, що функція F[...] є неперервною в певній області зміни аргументів. Нехай задано скінченну множину дій $\{X_N(t)\}\epsilon\{X(t)\}$, де $X_N(t)=\{x_k(t)\}_{k=1}^N$. Призначимо ці сигнали тестовими і, подаючи їх на вхід детектора, отримаємо відповідні реакції $\{Y_N(t)\}\epsilon\{Y(t)\}$, де $Y_N(t)=\{y_k(t)\}_{k=1}^N$. Отже, для всіх моментів часу $t\epsilon[0;T]$, де T – інтервал спостереження, задано скінченні множини дій з елементами $\{X_N(t)\}=[x_1(t), x_2(t),...,x_N(t)]$, а також відповідних реакцій $\{Y_N(t)\} =[y_1(t), y_2(t),...,y_N(t)]$ (тобто, для всіх моментів часу t інтервалу спостереження T математичні описи дій та відгуків детектора відомі). Тоді можна стверджувати таке.

Твердження. Нехай електронна схема описується рівнянням (1), функція F[...] якого є неперервною в певній області зміни своїх аргументів. Нехай також задано сигнали $x(t)\epsilon\{X_N(t)\}$, $y(t)\epsilon \{Y_N(t)\}$, де $\{X_N(t)\}$, $\{Y_N(t)\}$ – компактні множини сигналів. Тоді для сигналів x(t),y(t) і значення $\delta>0$ завжди знайдеться такий многочлен, зокрема, багатовимірний поліном L[...] скінченного степеня $(k_0+...+ +k_m+k_{m+1}+...+k_s)<\infty$, що буде виконуватись нерівність

$$\left| L(\ldots) \right| \le \delta, \tag{2}$$

де

$$L(...) = \sum_{k_0=0}^{K_0} ... \sum_{k_m=0}^{K_m} \sum_{k_{m+1}=0}^{K_{m+1}} ... \sum_{k_s=0}^{K_s} Ck_0...k_m k_{m+1}...k_s \times$$
$$\times \left[x(t)\right]^{k_0} ... \left[x^m(t)\right]^{k_m} \left[y(t)\right]^{k_{m+1}} ... \left[y^n(t)\right]^{k_s}, \tag{3}$$

$Ck_{0...}k_m k_{m+1...}k_s$ – коефіцієнти полінома, s=m+n+2. Багатовимірний поліном (3) є стаціонарним оператором, тому значення його коефіцієнтів не залежать від часу, а отже,

$Ck_{0\ldots}k_m k_{m+1\ldots}k_s$ – постійні величини.

Поліном (3) є лінійною функцією відносно коефіцієнтів {C}. Запишемо систему лінійних нерівностей відносно вказаних коефіцієнтів:

$$\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{k_0=0}^{K_0}\ldots\sum\limits_{k_m=0}^{K_m}\sum\limits_{k_{m+1}=0}^{K_{m+1}}\ldots\sum\limits_{k_s=0}^{K_s}Ck_0\ldots k_m k_{m+1}\ldots k_s\times\\ \times\left[x(t_i)\right]^{k_0}\ldots\left[x^m(t_i)\right]^{k_m}\left[y(t_i)\right]^{k_{m+1}}\ldots\left[y^n(t_i)\right]^{k_s}\end{array}\right|\le\delta, \tag{4}$$

$$i=\overline{1,k},$$

де k – кількість часових точок. Система нерівностей (4), сформована для різних часових точок, є перевизначеною, тобто кількість часових точок сигналів x(t) та y(t), які використовуються під час розв'язання задачі побудови макромоделі, значно перевищує кількість невідомих коефіцієнтів. Для розв'язання такої системи можна скористатись добре розробленими існуючими методами та відповідними програмами.

На основі знайденого аналогового прототипу можна конструювати дискретні макромоделі у вигляді відповідних різницевих схем. Позначимо дискретні значення дій x(t) та реакцій кола y(t), визначені в певних часових точках $t_k=k\Delta t$, де k – номер дискрети, Δt – крок дискретизації за часом, через відповідно x(k) та y(k). Якщо для вхідних дій та вихідних реакцій кола їх аналітичні вирази невідомі, такі сигнали задаються множинами дискретних часових точок відповідно (k)єX_M(k) та y(k)єY_M(k). У цьому випадку дискретну макромодель кола з певною точністю можна описати відповідним (1) різницевим рівнянням

$$G[x(k),\nabla x(k),\ldots,\nabla^m x(k),\ y(k),\nabla y(k),\ldots,\nabla^n y(k)]=0, \tag{5}$$

де

$$\nabla x(k)=\frac{x(k+1)-x(k-1)}{2},\nabla^2 x(k)=x(k+1)-2x(k)+x(k-1),\ldots,$$

$$\nabla y(k)=\frac{y(k+1)-y(k-1)}{2},\nabla^2 y(k)=y(k+1)-2y(k)+y(k-1),\ldots-$$

скінченні різниці відповідного порядку.

Розглянемо побудову математичних макромоделей детектора гармонічних модулюючих сигналів на конкретному прикладі. Нехай на вході детектора діють АМ-сигнали вигляду

$$x(t)=A(t)\cos\omega_0 t,\ A(t_i)>0, \tag{6}$$

де $A(t_i)$ — миттєве значення огинаючої, ω_0 – частота несучого коливання. Задані сигнали призводять до появи на виході детектора вихідних реакцій

$$y(t)=A(t). \tag{7}$$

Нехай детектор повинен перетворювати множину вхідних дій x(t)= =(1+M cos Ωt)cos ω_0t в множину відповідних реакцій y(t)=1+M cos Ωt, де M – амплітуда немодульованого коливання, Ω – частота модуляції. Задамо такі діапазони зміни M,Ω, ω_0 та t: Mє[0.1;0.6], Ωє[0.002; 0.01], ω_0є[0.9;1.0], tє [0;2p/Ω].

Для отримання необхідних розв'язків задамо значення M,Ω, ω_0 та t дискретно з кроком відповідно 0.1, 0.002, 0.02 та 0.2π/Ω. Врахуємо, що макромодель детектора АМ-сигналів не можна апроксимувати алгебраїчною функцією [1]. Тому внаслідок здійснення часткових переборів приймемо, що аналогову макромодель детектора можна апроксимувати п'ятивимірним поліномом четвертого порядку, аргументами якого є x(t), x'(t), x''(t), x'''(t) та y(t). Такий поліном, як частковий випадок полінома (3), є нерекурсивним оператором. Обчисливши для заданих дискрет M,Ω,ω_0,t за допомогою аналітичного диференціювання дискрети необхідних похідних від x(t), визначимо коефіцієнти шуканого полінома внаслідок розв'язання апроксимаційної задачі

$$\left\{\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{4}\sum_{k_3=0}^{2}\sum_{k_4=0}^{1}\sum_{k_5=0}^{2} Ck_1...k_5[x(t)]^{k_1}\left[x`(t)\right]^{k_2}\left[x``(t)\right]^{k_3}\left[x```(t)\right]^{k_4}\left[y(t)\right]^{k_5}\right\}^2 \to \min_C .$$

Пронормуємо при цьому коефіцієнт полінома при $[x'(t)]^4$.

Розв'язання задачі апроксимації на основі методу найменших квадратів призвело до визначення аналогової макромоделі детектора у вигляді такого рівняння:

$$x(t)^2\left[1.008x``(t)^2 - 0.989x`(t)x```(t)\right] - x`(t)^2\left[x`(t)^2 - 0.991\cdot x(t)x``(t)\right] -$$
$$-1.007x``(t)^2 y(t)^2 + 0.988x`(t)x```(t)y(t)^2 = 0.$$

Представимо отримане рівняння в явній формі

$$y(t) = \sqrt{\frac{x(t)^2\left[1.008x``(t)^2 - 0.989x`(t)x```(t)\right] - x`(t)^2(x`(t)^2 - 0.991x(t)x``(t))}{1.007x``(t)^2 - 0.988x`(t)x```(t)}}.$$

Дискретизація останнього співвідношення зумовлює відповідне різницеве рівняння

$$y(k) = \sqrt{\frac{x(k)^2\left\{1.008\left[\nabla^2 x(k)\right]^2 - 0.989\nabla x(k)\nabla^3 x(k)\right\} - \left[\nabla x(k)\right]^2 \times \\ \times\left\{\left[\nabla x(k)\right]^2 - 0.991x(k)\nabla^2 x(k)\right\}}{1.007\left[\nabla^2 x(k)\right]^2 - 0.988\nabla x(k)\nabla^3 x(k)}}.$$

Максимальне відносне відхилення вихідних сигналів отриманих макромоделей від необхідних вихідних сигналів детектора та їх середня квадратична похибка для $\Delta t=0.001\pi/\Omega_{max}$ відповідно дорівнюють $\varepsilon=9.593.10^{-3}$,$\sigma=1.017.10^{-4}$ та $\varepsilon^*=6.907.10^{-2}$, $\sigma^*=4.154.10^{-4}$. Як видно з отриманих результатів, знайдені макромоделі детектора мають достатньо високу точність.

Отже, внаслідок застосування методики з [5] отримані нерекурсивні аналогова та дискретна макромоделі детектора АМ-гармонічних сигналів. Такі макромоделі для заданих множин вхідних сигналів x(t), мають менші значення похибок, ніж аналоги з [1,2,3,4]. Порівняння нерекурсивних та рекурсивних макромоделей детектора, здійснене за умови приблизно однакової складності алгоритмів, свідчить про переваги нерекурсивних макромоделей завдяки меншому значенню похибки перетворення “вхід-вихід”, а також високій стійкості алгоритмів.

1. Букашкин С.А., Кузиев Э.М. Синтез алгоритмов цифровых рекурсивных демодуляторов АМ- и ЧМ-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1989. № 12. С.34. 2. Ланнэ А.А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. Л., 1985. 3. Применение цифровой обработки сигналов/Под ред. Э. Оппенгейма. М., 1980. 4. Соловьева Е.Б. Метод синтеза цифровых нерекурсивных детекторов в частотной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1996. № 5. С.69. 5. Tymoshchuk P. and Shapovalov Yu. Synthesis of electronic devices on the determination and digitization of implicit algebra-differential equations base // Radioelectronics and Communications Systems. April 1998. Vol.41. P.41.

УДК 519.62

Р.В. Слоньовський, І.Є.Тесак
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра прикладної математики

УЗАГАЛЬНЕНА АПРОКСИМАЦІЯ ПРОМІЖНИХ НАБЛИЖЕНЬ В ДРОБОВО - РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДАХ

У статті розглянуто забезпечення точності наближення комбінацій приростів тейлорівських розвинень при їх однокроковій апроксимації під час розв’язання систем диференціальних рівнянь другого порядку.

The question of accuracy of approximations of Taylor’s expansion fortheir one – step approximation for finding the solution of second order systems of differential equations were investigated.

Реалізація дробово-раціональних наближень довільного p – го порядку узгодженості з однокроковою чи багатокроковою апроксимаціями приростів тейлорівських розвинень відносно біжучого вузла інтегрування при числовому дослідженні жорстких систем диференціальних рівнянь другого порядку здійснюється на основі рекурентної процедури, запропонованої для систем диференціальних рівнянь першого порядку в роботі [1] . Ця ідея була використана і з відповідною модифікацією застосована для розв’язання систем другого та вищих порядків.

Суттю цієї статті є дослідження забезпечення точності наближення відповідних комбінацій приростів тейлорівських розвинень для їх однокрокової апроксимації при знаходженні розв’язку систем диференціальних рівнянь другого порядку

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \tag{1}$$

де $\mathbf{y} \in R^S$, $\mathbf{f} \in R^S$, $x \in [x_0, x_k]$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{y}'_0$.

Після формального розширення такої системи одержуємо задачу видгляду

$$\begin{cases} \mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_2, \\ \mathbf{z}'_2 = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \end{cases} \tag{2}$$

з початковими умовами

$$\mathbf{z}_1(x_0) = \mathbf{z}_{10} = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{z}_2(x_0) = \mathbf{z}_{20} = \mathbf{y}'_0, \quad \mathbf{z}_i \in R^S, i = 1,2.$$