

УДК 517.93

М.Д. Починайко, Б.М. Філь
 Національний університет "Львівська Політехніка",
 кафедра обчислювальної математики і програмування

ДЕЯКІ КЛАСИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

© М.Д. Починайко, Б.М. Філь, 2000

Засобами комп'ютерної алгебри досліджено розв'язки просторово-двовимірного рівняння Шредінгера, які отримують при інтегруванні методом оберненої задачі розсіювання .

Investigated solutions of space-twodimensional Shrödinger equation arose when inverse scattering problems method is applied by computer algebra system.

Розглянемо систему нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Шредінгера вигляду

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= k_1 u_{1,xx} - k_2 u_{1,yy} + (v_1 - v_2) u_1 \\ u_{2,t} &= k_2 u_{2,yy} - k_1 u_{2,xx} + (v_2 - v_1) u_2 \\ v_{1,x} &= 2k_2 (u_1 u_2)_y \quad v_{2,y} = 2k_1 (u_1 u_2)_x \end{aligned} \quad (1)$$

де k_1, k_2 – довільні комплексні числа. Систему рівнянь (1) часто називають рівняннями Деві-Стюартсона [1]. Система рівнянь (1) є інтегрованою системою і її дослідження описано в роботах [2-4]. У роботі [5] для системи (1) побудоване зображення Лакса, тобто систему можна подати у вигляді операторної рівності

$$LP - QL = 0,$$

$$\text{де } L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u_1 \\ u_2 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} D - v_1 & 2k_1 u_{1,x}' \\ 2k_2 u_{2,y}' & D - v_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} D - v_1 & -2k_2 u_{1,y}' \\ -2k_1 u_{2,x}' & D - v_2 \end{pmatrix}, D = \frac{\partial}{\partial t} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Для інтегрування вихідної системи використані результати застосування оберненої задачі розсіювання, (вони детально вивчені в роботах [6-7]) для системи рівнянь Дірака

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x} + u_1(x, y) \psi_2(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial \psi_2(x, y)}{\partial y} + u_2(x, y) \psi_1(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де коефіцієнти u_1, u_2 за двома змінними x і y достатньо швидко спадають на безмежності.

Розв'язок оберненої задачі для рівняння (2) зводиться до інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} K_1(x, y; \xi) + F_{12}(y, \xi) - \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, y; \alpha) \left[\int_{-\infty}^y G_{21}(\alpha, \beta) F_{12}(\beta, \xi) d\beta \right] d\alpha &= 0, \\ K_2(x, y; \xi) - G_{21}(x, \xi) - \int_{-\infty}^y K_2(x, y; \alpha) \left[\int_x^{\infty} F_{12}(\alpha, \beta) G_{21}(\beta, \xi) d\beta \right] d\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Коефіцієнти u_1, u_2 системи (2) визначаються через розв'язки інтегральних рівнянь (3) за допомогою рівностей

$$u_1(x, y) = K_1(x, y; x), \quad u_2(x, y) = K_2(x, y; y) \quad (4)$$

Показано, що якщо коефіцієнти u_1, u_2 системи (2) залежать від t як параметра і задовольняють рівняння (1), то функції $F_{12}(y, x), G_{21}(x, y)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{12}(y, x)}{\partial t} + \left[k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_{12}(y, x) &= 0 \\ \frac{\partial G_{21}(x, y)}{\partial t} + \left[k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] G_{21}(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Запишемо явні розв'язки системи (1), використавши точні розв'язки оберненої задачі розсіяння (2). Це можливо тоді, коли інтегральні рівняння (3) мають вироджені ядра. Для цього покладемо $F_{12}(y, x) = f_1(x)g_1(y)$, $G_{21}(x, y) = f_2(x)g_2(y)$. Згідно з формулою (5) функції f_1, f_2, g_1, g_2 задовольняють рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^i k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_i(x) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^i k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g_i(y) = 0 \quad (6)$$

З (3) і (4) отримуємо

$$\begin{aligned} u_1(x, y; t) &= - \frac{f_1(x; t)g_1(y; t)}{1 + FG} \\ u_2(x, y; t) &= \frac{f_2(x; t)g_2(y; t)}{1 + FG} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } F = - \int_x^\infty f_1(s; t)f_2(s; t)ds, \quad G = - \int_{-\infty}^y g_1(s; t)g_2(s; t)ds$$

У цій роботі дослідимо деякі класи розв'язків, що задаються формулами (7). Для цього обмежимося розглядом розв'язків (6) вигляду

$$\begin{aligned} f_i(x; t) &= (c_{f1i} \sinh(c_{fi}x) + c_{f2i} \cosh(c_{fi}x)) e^{(-1)^{i+1} k_i c_{fi}^2 t}, \\ g_i(x; t) &= (c_{g1i} \sinh(c_{gi}x) + c_{g2i} \cosh(c_{gi}x)) e^{(-1)^j k_2 c_{gi}^2 t}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (8)$$

де $c_{...}$ – довільні константи. За такого припущення (7) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1(x, y; t) &= \frac{(C_{11} e^{(C_{x1} + C_{x2})x} + C_{12} e^{-(C_{x1} + C_{x2})x})(C_{13} e^{(C_{y1} + C_{y2})y} + C_{14} e^{-(C_{y1} + C_{y2})y}) e^{P_1(t)}}{1 + \sum_{i=1}^{16} C_{P_i} e^{P_i(x, y, t)}}, \\ u_2(x, y; t) &= \frac{(C_{21} e^{(C_{x1} - C_{x2})x} + C_{22} e^{-(C_{x1} - C_{x2})x})(C_{23} e^{(C_{y1} - C_{y2})y} + C_{24} e^{-(C_{y1} - C_{y2})y}) e^{P_2(t)}}{1 + \sum_{i=1}^{16} C_{P_i} e^{P_i(x, y, t)}} \end{aligned} \quad (9)$$

де C_{ij}, C_{xi}, C_{yj} – деякі довільні константи (на загал пов'язані з довільними константами з (8)), $P_i(x, y, t) = c_{ix}x + c_{iy}y + c_{it}t$, $P_i(t) = c_{int}t$ – поліноми з коефіцієнтами, що залежать від

C_{xi}, C_{yj} та k_i ; C_{P_i} – константи вигляду $\frac{C_{1i}C_{2j}C_{3k}C_{4l}}{a_{ijkl}C_{x_{nij}}C_{y_{m_{kl}}}}$, $(i, j, k, l = \overline{1, 2}, n_{ij}, m_{kl} = \overline{1, 2}; a_{ijkl}$ – деякі

константи). Варто зауважити, що константи пов'язані між собою так, що в знаменнику (9) при виборі довільних C_{ij}, C_{xi}, C_{yj} залишається тільки одна, дві або чотири експоненти.

Надалі обмежимося випадком коли хоча б один з розв'язків (1) $u_1(x, y; t)$ або $u_2(x, y; t)$ є обмеженим і, для зручності покладемо $k_1 = k_2 = 1$. Значить для системи (1) з розв'язків вигляду (7) при припущеннях (8) можна виділити три класи розв'язків:

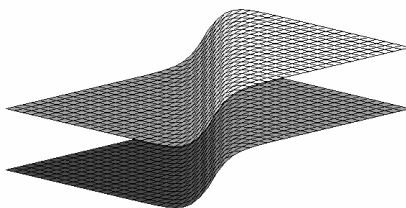
Перший – вигляду

$$u_1(x, y; t) = \frac{e^{(C_{11}x + C_{12}y + C_{13}t)}}{C_1 + C_2 e^{(C_1x + C_2y + C_3t)}}, \quad u_2(x, y; t) = \frac{e^{(C_{21}x + C_{22}y + C_{23}t)}}{C_1 + C_2 e^{(C_1x + C_2y + C_3t)}}$$

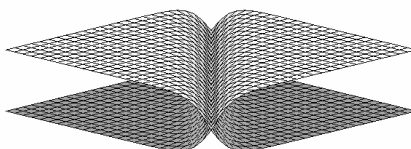
де C_{ij}, C_i – деякі узгоджені між собою константи, що залежать від довільних констант з (8). Ці розв'язки породжують пару кінків, стаціонарних або в еволюції. Наприклад, розв'язок вигляду

$$u_1(x, y; t) = -\frac{1}{1 + e^{x+y+t}}, \quad u_2(x, y; t) = \frac{e^{x+y+t}}{1 + e^{x+y+t}}$$

породжує два паралельні кінки, які узгоджено рухаються в одному напрямку перпендикулярно до свого фронту



Розв'язок $u_1(x, y; t) = \frac{1}{1 + e^{-x+y-2t}}$, $u_2(x, y; t) = \frac{e^{-x+y-2t}}{1 + e^{-x+y-2t}}$ породжує кінк та антикінк, які рухаються подібно



Варіації констант змінюють тільки розміри кінків та антикінків, не додаючи нового в якісну картину. Якщо вибрати константи так, щоб коефіцієнти при t дорівнювали нулю, то отримуємо стаціонарну пару кінк-кінк або кінк-антикінк.

Другий – вигляду

$$u_1(x, y; t) = \frac{(C_{11}e^{(C_{x1}+C_{x2})x} + C_{12}e^{-(C_{x1}+C_{x2})x})(C_{13}e^{(C_{y1}+C_{y2})y} + C_{14}e^{-(C_{y1}+C_{y2})y})e^{P_1(t)}}{1 + C_{P_1}e^{P_1(x,y,t)} + C_{P_2}e^{P_2(x,y,t)}},$$

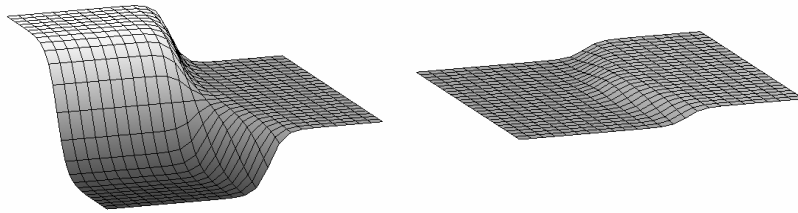
$$u_2(x, y; t) = \frac{(C_{21}e^{(C_{x1}-C_{x2})x} + C_{22}e^{-(C_{x1}-C_{x2})x})(C_{23}e^{(C_{y1}-C_{y2})y} + C_{24}e^{-(C_{y1}-C_{y2})y})e^{P_2(t)}}{1 + C_{P_1}e^{P_1(x,y,t)} + C_{P_2}e^{P_2(x,y,t)}}$$

де C_{ij}, C_i – деякі узгоджені між собою константи, що залежать від довільних констант з (8).

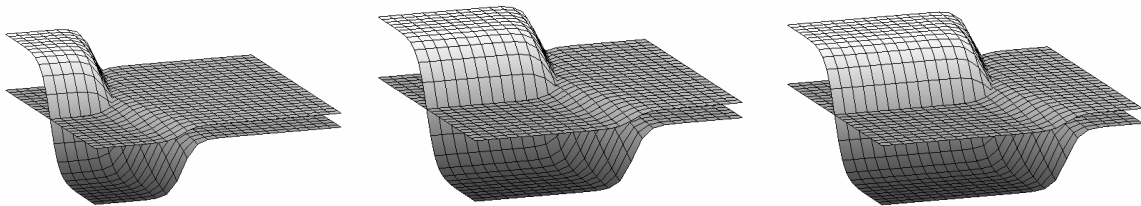
З обмежених розв'язків можна виділити розв'язок

$$u_1(x, y; t) = \frac{e^{-\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t} - e^{\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t}}{4 + e^{\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t} + e^{-\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t}}, \quad u_2(x, y; t) = \frac{1}{4 + e^{\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t} + e^{-\frac{1}{4}x - y - \frac{15}{16}t}}.$$

Функції $u_1(x, y; t)$ та $u_2(x, y; t)$ при фіксованому t мають вигляд



відповідно. $u_1(x, y; t)$ є сходинкою, яку фронт у вигляді кута, що рухається вздовж її осі виводить на нуль; $u_2(x, y; t)$ є “антикінком” з фронтом у вигляді кута, причому обидва фронти рухаються узгоджено. Нижче показано еволюцію цих розв’язків у часі



Подібно виглядає і стаціонарний випадок, тому ми його не наводимо.

Третій – вигляду

$$u_1(x, y; t) = \frac{(C_{11}e^{(C_{x1}+C_{x2})x} + C_{12}e^{-(C_{x1}+C_{x2})x})(C_{13}e^{(C_{y1}+C_{y2})y} + C_{14}e^{-(C_{y1}+C_{y2})y})e^{P_1(t)}}{1 + C_{P_1}e^{P_1(x,y,t)} + C_{P_2}e^{P_2(x,y,t)} + C_{P_3}e^{P_3(x,y,t)} + C_{P_4}e^{P_4(x,y,t)}},$$

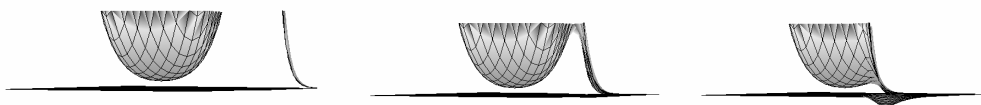
$$u_2(x, y; t) = \frac{(C_{21}e^{(C_{x1}-C_{x2})x} + C_{22}e^{-(C_{x1}-C_{x2})x})(C_{23}e^{(C_{y1}-C_{y2})y} + C_{24}e^{-(C_{y1}-C_{y2})y})e^{P_2(t)}}{1 + C_{P_1}e^{P_1(x,y,t)} + C_{P_2}e^{P_2(x,y,t)} + C_{P_3}e^{P_3(x,y,t)} + C_{P_4}e^{P_4(x,y,t)}}.$$

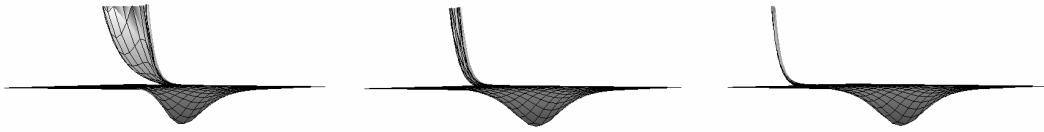
З отриманих розв’язків виділимо розв’язок

$$u_1(x, y; t) = -48 \frac{e^{-3x+2y+5t}}{192 + e^{-4x+3y+5t} + 2e^{-2x+3y+5t} + 3e^{-4x+y+5t} + 6e^{-2x+y+5t}},$$

$$u_2(x, y; t) = 192 \frac{ch(x)ch(y)}{192 + e^{-4x+3y+5t} + 2e^{-2x+3y+5t} + 3e^{-4x+y+5t} + 6e^{-2x+y+5t}}.$$

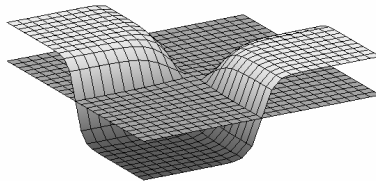
Нижче зображено зверху поверхню, яка задається функцією $u_2(x, y; t)$, знизу – $u_1(x, y; t)$. $u_2(x, y; t)$ – має вигляд при $t \rightarrow -\infty$ “параболоїда” (насправді в перетинах площиною, що паралельна до площини Oxy отримаємо фігуру, яка нагадує прямокутник з заокругленими кутами). Зі зміною часу він “вистилається” на нуль фронтом, подібним на фронт кінка, так ніби дорожній каток намагається зрівняти цей “параболоїд” з землею. Коли фронт підходить до центра параболоїда, функція $u_1(x, y; t)$ з нуля починає “витискатися” і утворюється яма, яка є подібною до цього “параболоїда”. Тобто поверхня утворена $u_1(x, y; t)$ за короткий проміжок часу з “стаціонарного” нульового положення еволюціонує в інше “стаціонарне” положення – яму.



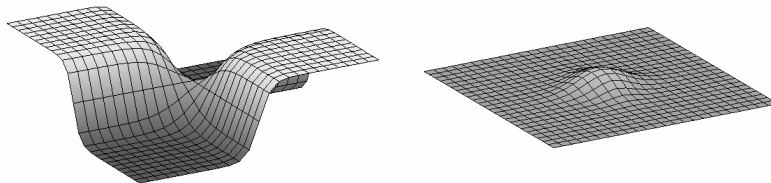


Цікавим є також стаціонарний розв'язок

$$u_1(x, y; t) = 16 \frac{sh(x)sh(y)}{16 + e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}}, \quad u_2(x, y; t) = 4 \frac{1}{16 + e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}} :$$



Він складається з двох поверхонь (для зручності розгляду перша розвернута відносно осі симетрії – для другої також змінений масштаб по вертикалі), відповідно $u_1(x, y; t)$ та $u_2(x, y; t)$:



На загал поверхні розв'язків можна трактувати як “комбінації” однієї (перший випадок), двох (другий) або чотирьох (третій) обмежених або необмежених сходинок-кінків. Зокрема, “параболоїд”, яма чи горб, які ми бачимо в третьому випадку не є поверхнями обертання, а утворені саме такими “комбінаціями”. У перетині вони більше подібні до прямокутника з заокругленими кутами, ніж до кола чи еліпса.

Робота виконана з застосуванням можливостей комп'ютерної алгебри.

1. Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves// *Proc.R.Soc.Lond.* 1974. Vol.A338, P.101-110.
2. Morris H.C. // *J.Math. Phys.* 1976. Vol.17. №10. P.1870-1872.
3. Cornille H. // *J.Math.Phys.* 1978. Vol.20. №1 P.199-209.
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. // *Функц. анализ.* 1974. Т.8. Вып.3. С.43-53.
5. Нижник Л.П., Починайко М.Д. // *Функц. анализ.* 1982. Т.16. Вып.1. С.80-82.
6. Нижник Л.П. // *Укр. матем. журн.* 1972. Т.24. Вып.1. С.112-115.
7. Нижник Л.П. *Обратная нестационарная задача рассеяния.* К., 1973.