УДК 518:517. 944/947

І.А.Анджейчак, І.М.Бойко
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ВИКОРИСТАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ХВИЛЕВОДІВ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Пропонується числово-аналітичний метод розрахунку електричних та магнітних хвиль циліндричного хвилеводу складної форми.

At is considered numerical analytical calculation electric and magnetic waves of cylindrical waveguides complicated of form. Solution of this problem is reduced to determination and solution the systems of linear algebraic equations of low order.

Різноманітні застосування в радіотехніці НВЧ мають хвилеводи, складені з прямокутників. Однак, якщо практичне створення радіотехнічних пристроїв з їх використанням відзначається більшою простотою та меншою вартістю виробництва, то розрахунок електричних параметрів таких хвилеводів має значні математичні труднощі, зумовлені тим, що поперечний перетин хвилеводу має геометрію, яка при розв'язку хвильового рівняння не дає змоги розділяти змінні. У статті наведений числово аналітичний метод визначення власних значень і власних функцій електричних і магнітних хвиль, який можна використовувати в теорії розрахунку хвилеводів такої складної форми.

Як відомо [2, 4], поле у циліндричному регулярному хвилеводі з ізотропним та однорідним заповненням можна представити як суперпозицію електричних та магнітних хвиль, що відповідають електричному $\vec{\Pi}^{\ell}$ і магнітному $\vec{\Pi}^{h}$ векторам Герца зі складовими

$$\Pi^{\ell}{}_x = \Pi^{\ell}{}_y = 0, \quad \Pi^{\ell}{}_z = \Pi^{\ell}(x,y)\cdot e^{ihz},$$
$$\Pi^{h}{}_x = \Pi^{h}{}_y = 0, \quad \Pi^{h}{}_z = \Pi^{h}(x,y)\cdot e^{ihz} \quad . \tag{1}$$

При цьому скалярні функції $\Pi^h(x, y)$ і $\Pi^{\ell}(x, y)$ повинні задовольняти двовимірне рівняння Гельмгольца

$$\Delta\Pi^{\ell,h} + g^2\Pi^{\ell,h} = 0 \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$\Pi^{\ell}(x,y)\,\Big|_{L_1,L_2} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\Pi^{h}(x,y)}{\partial n}\right|_{L_1,L_2} = 0, \tag{4}$$

де L_1+L_2 – контур, утворений перетином стінок хвилеводу площиною z=const, а n – нормаль до контуру L_1+L_2. Робимо припущення, що провідність стінок хвилеводу ідеальна. Для спрощення викладень допускаємо також, що матеріал заповнення має діелектричну сталу ε та магнітну проникність μ, дорівнюють одиниці. Узагальнення результатів на випадок довільних ε і μ не спричиняє труднощів.

Складові поля електричних хвиль зв'язані з функцією $\Pi^{\ell}(x,y)$ формулою

$$E_x = ih\frac{\partial \Pi^{\ell}}{\partial x}\cdot e^{ihz},\ H_x = -ik\frac{\partial \Pi^{\ell}}{\partial y}\cdot e^{ihz},$$

$$E_y = ih\frac{\partial \Pi^{\ell}}{\partial y}\cdot e^{ihz},\ H_y = -ik\frac{\partial \Pi^{\ell}}{\partial x}\cdot e^{ihz}, \qquad (5)$$

$$E_z = g^2\cdot \Pi^{\ell}\cdot e^{ihz},\ H_z = 0.$$

Відповідно, для складових магнітних хвиль маємо

$$E_x = ik\frac{\partial \Pi^{h}}{\partial y}\cdot e^{ihz},\ H_x = -ih\frac{\partial \Pi^{h}}{\partial x}\cdot e^{ihz},$$

$$E_y = -ik\frac{\partial \Pi^{h}}{\partial x}\cdot e^{ihz},\ H_y = ih\frac{\partial \Pi^{h}}{\partial y}\cdot e^{ihz}, \qquad (6)$$

$$E_z = 0,\ H_z = g^2\cdot \Pi^{\ell}\cdot e^{ihz}.$$

Тут $g^2= k^2- h^2$, де $g = \frac{2\pi}{\nu_{кр}}$ – хвильове число поперечного перетину хвилеводу; $\nu_{кр}$ – відповідна йому критична довжина хвилі, $k = \frac{2\pi}{\nu}$ – хвильове число вільного простору .

Отже, якщо відомі $\Pi^{\ell}(x,y)$ і $\Pi^{h}(x,y)$, то, користуючись співвідношеннями (5) і (6), можна побудувати картину поля у хвилеводі. Отже, задача зводиться до знаходження власних чисел і власних функцій рівняння Гельмгольца, прямокутників G_1 і G_2, при крайових умовах Діріхле (3) та Неймана (4).

Для розрахунку електричних хвиль для області $G=G_1 + G_2$ з границею $L=L_1+L_2$ розглядається задача на власні значення

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u\big|_{L_1+L_2} = 0. \qquad (7)$$

Покриваємо кожний прямокутник прямокутною рівномірною сіткою

а) для G_1: $x_i=x_0+ih$, $y_k=y_0+ kh_1$ $(i = \overline{0, m+1};\ k = \overline{0, n+1})$; $x_0=0$, $x_{m+1}=a$, $x_{m+m'+2}=a+a'$, $y_0=a$, $y_0=0$, $y_p=\ell$, $y_s=d$, $y_{s+r+1}=d+\ell$, $y_{n+1}=b$, $y_{p+n'+1}=c+b'$; $h=a/(m+1)$, $h_1=b/(n+1)$.

б) для G_2: $x''_i=x'_0+ih$, $y'_k=y'_0+kh_1$ $(i = \overline{0, m'+1};\ k = \overline{0, n'+1})$; $x'_0=a$, $x'_{m'+1}=a+a'$, $y'_0=c$, $y'_{n'+1}=b'$, $h'=a'/(m'+1)$, $h_1=b'/(n'+1)$.

Вузли $(x_{m+1}, y_s)=(x'_0,y'_0)$, $(x_{m+1}, y_{s+1})=(x'_0,y'_1)$,…,$(x_{m+1}, y_{s+r+1})=(x'_0,y'_{n'+1})$ є спільними як для G_1 (ділянка правої вертикальної сторони), так і для G_2 (ділянка лівої вертикальної сторони).

Для отриманої полігональної сіткової області $G^h_1+ G^h_2$ розглядається відповідна диференціальній задачі (7) скінченно різницева задача

$$\Delta_h u_{ik} + \lambda u_{ik} = 0 \qquad (8)$$

$$u_{io}=u_{i,n+1}=0;\ i = \overline{1, m}, \qquad u_{ok}=0,\ k = \overline{1, n}, \qquad (9)$$

$$u_{m+1,k}=0\ \ (k=1,2,\ldots s,s+r+1,\ s+r+2,\ldots,n);$$

$$u_{io'}=u_{i',n+1}=0\ (i=1,2,\ldots,m');$$

$$u'_{ok}=0\ (k=1,2,\ldots,s',s'+r+1,\ s'+r+2,\ldots,n'), \qquad (10)$$

$$u'_{m'+1,k}=0 \quad k=\overline{1,n'}\text{, тут } u'_{ik}=u(x'_i, y'_k),\ s'=s-p$$

Рівності (9) є граничними умовами для прямокутника G^h_1, рівності (10) – для G^h_2.

Вводимо тепер невизначені параметри (невідомі розв′язки в точках лінії стику L^h прямокутників G^h_1 та G^h_2.

$$V_k=u_{m+1,s+k}=u'_{o,s'+k},\quad k=\overline{1,r}, \tag{11}$$

на основі методу Г.М.Положія отримуємо розв'язки [2, 3], відповідно, у прямокутниках G^h_1 та G^h_2.

$$u_{ik}=\sum_{\nu=1}^{r} a^{ik}{}_{m,s+\nu}(t)V_\nu \quad i=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,n} \tag{12}$$

$$u'_{ik}=\sum_{\nu=1}^{r} {}^1a^{ik}{}_{m',s'+\nu}(t)V_\nu \quad i=\overline{1,m'};\quad k=\overline{1,n'} \tag{12′}$$

Для визначення r параметрів – розв'язків на стику прямокутників L^h записуємо рівняння (8)

$$u_{m,s+k}+u'_{1,s'+k}+\gamma^2(V_{k-1}+V_{k+1})-2tV_k=0 \tag{13}$$

$$k=\overline{1,r},\qquad V_0=V_{r+1}=0.$$

Підставляючи (12) та (12′) в (13), отримуємо СЛАР *r*–го порядку

$$(A_1(t)+A_2(t)+\gamma^2T-2tE)\vec{V}=0, \tag{14}$$

де введені позначення

$$\gamma=h/h_1,\ t=1+\gamma^2-\lambda h^2/2,$$

$$\vec{V}=(V_1,V_2,\dots,V_r),$$

$$A_1(t)=\left[a^{m,s+k}_{m,s+\nu}(t)\right]^r_{k,\nu=1}=\left[\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\frac{\overline{P^2{}_{1p}P_{s+k,q}P_{s+\nu,q}}}{2(t-t_{pq})}\right]^r_{k,\nu=1},$$

$$A_2(t)=\left[a^{1,s'+k}_{1,s'+\nu}(t)\right]^r_{k,\nu=1}=\left[\sum_{p=1}^{m'}\sum_{q=1}^{n'}\frac{\overline{P'^2{}_{1p}P'_{s'+k,q}P'_{s'+\nu,q}}}{2(t-t'_{pq})}\right]^r_{k,\nu=1},$$

$$\overline{P}_{1p}=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\sin\frac{p\pi}{m+1},\quad p_{kq}=\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{kq\pi}{n+1},$$

$$t_{pq}=\cos\frac{p\pi}{m+1}+\gamma^2\cos\frac{q\pi}{n+1},$$

$$\overline{P'}_{1p}=\sqrt{\frac{2}{m'+1}}\sin\frac{p\pi}{m'+1},\quad p'_{kq}=\sqrt{\frac{2}{n'+1}}\sin\frac{kq\pi}{n'+1},$$

$$t'_{pq}=\cos\frac{p\pi}{m'+1}+\gamma^2\cos\frac{q\pi}{n'+1},$$

T – матриця порядку r простого вигляду [3], E – одинична матриця *r*-го порядку.

Якщо серед t_{pq} і t'_{pq} є такі, що збігаються а для відповідних їм власних функцій виконується умова

$$C_1\, u_{m,s+k} + C_2 u'_{1,s'+k}\ ,\quad k=\overline{1,r}\,,$$

де C_1 і C_2 – постійні, які не дорівнюють нулю одночасно, то це означає, що задача (8)-(10) має ці власні значення, які збігаються як свої вироджені власні значення. Найважчим є знаходження невироджених власних значень та власних функцій області $G^h{}_1+G^h{}_2$, тобто таких, для яких $\vec{V}\neq 0$.

Невироджені власні значення знаходимо за умови існування ненульового розв'язку системи (14)

$$D(t)=\det[A_1(t)+A_2(t)+\gamma^2T-2tE]=0 \tag{15}$$

Враховуючи, що кожний елемент матриці $A_1(t)+A_2(t)+\gamma^2T-2tE$ є раціональною функцією, яка має вигляд розкладу за дробами $\dfrac{1}{t-t_{pg}}$ і $\dfrac{1}{t-t'_{pg}}$, визначник (15), який будемо називати характеристичним визначником, представимо у вигляді ланцюгового дробу

$$D(t)=D(t_1)+\frac{t-t_1}{\rho_1(t_1,t_2)}+\frac{t-t_2}{\rho_2(t_1,t_2,t_3)-d(t_1)}+$$

$$+\frac{t-t_3}{\rho_3(t_1,t_2,t_3,t_4)-\rho_1(t_1,t_2)}+\ldots+\frac{t-t_{w-1}}{\rho_{w-1}(t_1,t_2,\ldots t_w)-\rho_{w-3}(t_1,t_2,\ldots,t_{w-2})}+ \tag{16}$$

$$+\frac{t-t_w}{\rho_w(t,t_1,t_2,\ldots t_w)-\rho_{w-2}(t_1,t_2,\ldots,t_{w-1})}.$$

Для визначення коренів (15) проводимо обчислення $\rho_j(j=\overline{1,w})$ обернених різниць D(t), складаємо $t_j(j=\overline{1,w})$ зростаючу послідовність значень t, що не збігається ні з одним t_{pq} і t'_{pq}. При знаходженні коренів D(t), представленого у вигляді (16), використовуємо алгоритм обчислення підхідних дробів знизу вверх або рекурентні співвідношення для підхідних дробів Тіле. Після визначення коренів (16) t^*_1, t^*_2,… ,t^*_{10} для отримання відповідних їм власних функцій V^*_1, V^*_2,…, V^*_{10} розв′язуємо однорідну систему (14) відносно невідомих параметрів $\vec{V}$ і підставляємо їх у формули (12) і (12′). Так реалізується алгоритм розв'язку задачі на власні значення (8)-(10) при розрахунку електричних хвиль для області $Cт=Cт_1+Cт_2$ з границею $L=L_1+L_2$.

Для розрахунку магнітних хвиль розглядаємо задачу на власні значення

$$\Delta u+\lambda u=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L=0 \tag{17}$$

Відповідно диференціальній задачі (17) різницева задача матиме вигляд

$$\Delta_h u_{ik} + \lambda u_{ik} = 0, \tag{18}$$

$$u_{i0}-u_{i1}=u_{in+1}-u_{in}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$$u_{0k}-u_{1k}=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{19}$$

$$u_{m+1,k}-u_{mk}=0 \ \ (k=1,2,\ldots,s,\ s+r+1,\ s+r+2,\ \ldots,\ n),$$

$$u'_{i0}-u'_{i1}=u'_{i,n'+1}-u'_{in'}=0 \quad (i=1,2,\ldots,m'), \tag{20}$$
$$u'_{ok}-u'_{ik}=0 \quad (i=1,2,\ldots, s', s'+r+1, s'+r+2, \ldots, n'),$$
$$u'_{m'+1,k}-u'_{m'k}=0 \quad (k=1, 2, \ldots,n'),$$

де $s'=s-p$.

Аналогічно першій крайовій задачі тут вводяться невизначені параметри, крайові умови на лінії L стику прямокутників

$$\mathbf{V_k= u_{m+1,s+k}-u_{m,s+k}= u'_{1,s'+k}-u'_{0,s'+k}}, \quad k=\overline{1,r}. \tag{21}$$

Тоді загальний розв′язок задачі запишеться, відповідно, в прямокутнику G_1 та G_2

$$u_{ik}=\sum_{\nu=1}^{r} a^{ik}{}_{m,s+\nu}(t)V_\nu \quad i=\overline{1,m}; \quad k=\overline{1,n}, \tag{22}$$

$$u'_{ik}=-\sum_{\nu=1}^{r} a^{ik}{}_{m,s'+\nu}(t)V_\nu \quad i=\overline{1,m'}; \quad k=\overline{1,n'}, \tag{23}$$

де в коефіцієнтах формул (22) і (23) використовуються елементи матриць Λ_4 та P_4 [2].

Підставляючи тепер (22) та (23) в рівність

$$u_{m,s+k}-u'_{0,s'+k}+V_k=0 \qquad k=\overline{1,r}, \tag{24}$$

отримуємо характеристичну систему у вигляді

$$[A_1(t)+A_2(t)+E]\vec{V}=0, \tag{25}$$

де

$$A_1(t)=\left[a^{1,s+k}_{1,s+\nu}(t)\right]^{r}_{k,\nu=1},$$
$$A_2(t)=\left[a^{1,s'+k}_{1,s'+\nu}(t)\right]^{r}_{k,\nu=1}.$$

У цьому випадку виродженими власними значеннями для області G_1 та G_2 буде $\lambda=0$ ($t=1$) з вдповідною виродженою власною функцією $u=\mathrm{const}$. Невироджені власні значення визначають з рівняння

$$D(t)=\det[A_1(t)+A_2(t)+E]=0. \tag{26}$$

Враховуючи, що отриманий визначник (26) є дробово-раціональною функцією з відомими полюсами, його можна представити у вигляді ланцюгового дробу (16) або ж користуватися перетвореннями Паде [1]. Невироджені власні функції сіткової області $G^h{}_1+G^h{}_2$ визначаються за формулами (22), (23).

1. Скоробоготько В.Я. Теория ветвящихся дробей и ее применение в вычислительной математике. М., 1993. 2 Ляшенко И.Н., Анджейчак И. А., Соломенчук В.Д. Расчет экранированной полосковой линии методом суммарных представлений. //Вычислительная и прикладная математика. 1972. Вып. 18. С.142-152. 3. Анджейчак І.А., Бойко І.М. Ланцюгові дроби в задачах на власні коливання ізотропних пластин // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 341. С.3-7.4. Вольднер О.А., Собенин Н.П., Зверев Б.В., Щедрин И.С. / Справочник по диафрагмовым волноводам. М., 1977.