УДК 621.382

Р.А. Воробель, *О.П. Гук, К.В. Сущик, 2003
Фізико-механічний інститут ім Г. В. Карпенка НАН України,
*НВО “Термоприлад”

БАЛАНСНІ НАБЛИЖЕННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ ПРЕДСТАВЛЕННІ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОМЕТРІВ ОПОРУ

Запропоновано метод знаходження балансних наближень градуювальних характеристик нелінійними виразами. Новизною запропонованого підходу є те, що вхідними даними є неперервна функція, а не дискретна множина. Цим забезпечується досягнення оптимальної точності на всьому проміжку визначення градуювальної характеристики.

A method of calculation of balanced approximation of calibration scale by non-linear expressions is proposed. A novelty of proposed techniques is the use of input data as continuous function instead of discrete set of points. Such an approach allows to reach optimal accuracy at whole interval of calibration scale.

Вступ

Сучасний науково-технічний прогрес характеризується значним зростанням впливу інтелектуальних засобів вимірювань на побудову технологічних процесів, інтенсифікацію продуктивності праці, ріст якості та здешевлення продукції. Температура є також основним фізичним параметром, який відіграє значну роль при контролі, управлінні та автоматизації технологічних процесів[5]. Тому актуальною є задача підвищення точності вимірювання температури.

У роботі аналізуються первинні термоперетворювачі опору, особливості яких віддзеркалює градуювальна характеристика. Саме достовірне і зручне подання цієї характеристики є запорукою дотримання необхідних похибок перетворення при вимірюванні температури. Тому спочатку проаналізуємо апроксимаційні підходи до подання градуювальних характеристик (розділ 1), потім дослідимо ядро наближення та оцінимо його похибку (розділ 2), опишемо спосіб знаходження границь ланок сплайну (розділ 3) та подамо результати моделювання термометрів опору (розділ 4).

1. Апроксимаційне подання градуювальник характеристик термоперетворювачів

Градуювальні характеристики термоелектричних перетворювачів, як правило, мають значну нелінійність і тому їх часто подають у вигляді таблично заданих функції або за допомогою інтерполяційних поліномів. Використання поліноміального опису на практиці ускладнюється його обчислювальною громіздкістю, зумовленою високим порядком полінома. Фактично при побудові термометрів для лінеаризації нелінійності градуювальної характеристики використовують обернену їй. Так, наприклад, функція, обернена до градуювальної характеристики платинового термометра, точно описується поліномом п’ятнадцятого степеня, чим забезпечується діапазон вимірюваних температур термометра від 13.8033 К до 273.16 К[1]. Тобто актуальною є проблема більш ефективних методів наведення градуювальних характеристик в аналітичному вигляді. Для цих цілей доцільно використовувати балансні наближення сплайнами, кожна ланка яких є найкращим чебишовським наближенням, а похибка досягає максимального значення на кожній ланці сплайну. Такі наближення є оптимальні, тобто при заданій кількості ланок вони наближають функцію з мінімальною похибкою, а при заданій похибці мають мінімальну кількість ланок.

Розглянемо наближення функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ чебишовським сплайном

$$S(F,x)=\sum_{i=1}^{r} F(A_i,x)\theta((x-z_{i-1})(z_i-x)), \tag{1}$$

де $\theta(x)$ – функція Хевісайда; $Z=\{z_i\}_{i=0}^{r}$ – множина вузлів сплайну; $F(A_i,x)=F(a_{0i},a_{1i},\ldots a_{mi};x)$ – функція наближення.

Виберемо функцію $F(A,x)$ у вигляді

$$F(A,x)=g(x)\varphi(V_{k,l}(A,x)), \tag{2}$$

де $\varphi(x)\in C^{\infty}[a,b], \varphi(x)$ – монотонна на $[a,b]$, $g(x)\in C^1[a,b], g(x)\neq 0$ на $[a,b]$;

$$V_{k,l}(A,x)=x^s R_{k,l}(A,x^p)=x^s\,\frac{\sum_{j=0}^{k} a_j x^{jp}}{1+\sum_{j=1}^{l} b_j x^{jp}}.$$

2. Ядро наближення та оцінка похибки

Відомо, що при виконанні умови $f(x)\in C^{m+1}[a,b], f(x)\neq 0$ максимальна похибка найкращого чебишовського наближення многочленом $P_m(x)$ на інтервалі $[a,b]$ має вигляд

$$\mu=\frac{\left|f^{(m+1)}(\xi)\right|(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \tag{3}$$

Припустимо, що при виконанні певних умов для довільного виразу наближення $F(A,x)$, залежного від параметрів $A=(a_0,\ldots,a_m)$, максимальна похибка найкращого чебишовського наближення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ може бути подана як

$$\mu=\frac{\eta(f(\xi),F)(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!}. \tag{4}$$

При виконанні рівності (4) вираз $\eta(f(\xi),F)$ називається ядром наближення функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$. У загальному випадку вираз ядра залежить від $m+1$ похідних функції, що наближується:

$$\eta(f(\xi),F)=\phi(f'(x),f''(x),\ldots,f^{(m+1)}(x),F).$$

Відомо [2], що коли ядро наближення $\eta(f,F)\neq 0$ при $x\in[a,b]$, то максимальна похибка рівномірного наближення функції $f(x)\in C^{m+2}[a,b]$ ($m=k+l$) чебишовським сплайном (1) з заданою кількістю ланок r має вигляд

$$\mu=\frac{r^{-m-1}}{2^{2m+1}(m+1)!}\left(\int_a^b\left|\frac{\eta(f,F)}{w(x)}\right|^{\frac{1}{m+1}}dx\right)^{m+1}\left[1+O\left(\frac{b-a}{r}\right)\right].$$

3. Знаходження границь ланок сплайну. Для знаходження границь ланок $Z = \{z_i\}_{i=0}^{r}$ $(z_i < z_{i+1}, i = 0,1,..,r, \quad z_0 = a, z_r = b)$ при балансному наближенні функції $f(x) \in C^{(m+1)}[a,b]$ сплайном з $r\,(r \to \infty)$ ланками – найкращими чебишовськими многочленними наближеннями степеня *m* – Г.Мейнардус запропонував ітераційну формулу для розв’язування системи *(r–1)*-го рівняння із *(r–1)*-м невідомим $z_i\,(i = 1,2,..., r-1)$:

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i+1}^{(t-1)}\varphi\left(\dfrac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{t-1}}{2}\right) + z_{i-1}^{(t)}\varphi\left(\dfrac{z_i^{t-1} + z_{i-1}^{t}}{2}\right)}{\varphi\left(\dfrac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{t-1}}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{z_i^{t-1} + z_{i-1}^{t}}{2}\right)}, \tag{5}$$

де $\varphi(x) = \left| f^{(m+1)}(x) \right|^{1/(m+1)}$, величина Z_i є черговим значенням z_i; початкові значення точок z_i поділяють проміжок $[a,b]$ на рівні частини. Ітераційна формула (5) збігається, якщо функція $\varphi(x)$ не змінює знака на проміжку $[a,b]$. Відоме [2] узагальнення формули (5) для наближення сплайном з ланками $F(A,x) = F(a_0,\ldots,a_m,x)$. При цьому функція $\varphi(x)$ набуває вигляду $\varphi(x) = \left|\eta(f(x),F(A,x))/w(x)\right|^{1/(m+1)}$, де $\eta(f(x),F(A,x))$ – ядро наближення функції $f(x)$ виразом $F(A,x)$; $w(x)$–вага наближення. Ядро наближення знаходять методами, викладеними раніше[4].

Формула (3) отримана з умови рівності похибки на ланках шляхом застосування до кожної з них виразу (2) та заміни інтегрування квадратурною формулою прямокутників.

З метою підвищення точності ітераційної формули застосуємо тут замість формули прямокутників квадратурну формулу Сімпсона. Так виведена нова ітераційна формула для знаходження границь заданої кількості ланок сплайну при балансному наближенні [3]:

$$z_i^{(t)} = \frac{z_{i-1}^{(t-1)}\left(\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right) + 4\varphi\left(\dfrac{z_{i-1}^{(t-1)} + z_i^{t-1}}{2}\right) + \varphi\left(z_i^{(t-1)}\right)\right) + z_{i+1}^{(t)}\left(\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right) + 4\varphi\left(\dfrac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{t-1}}{2}\right) + \varphi\left(z_{i+!}^{(t-1)}\right)\right)}{\varphi\left(z_{i-1}^{(t-1)}\right) + 4\varphi\left(\dfrac{z_{i-1}^{(t-1)} + z_i^{t-1}}{2}\right) + 2\varphi\left(z_i^{(t-1)}\right) + 4\varphi\left(\dfrac{z_i^{(t-1)} + z_{i+1}^{t-1}}{2}\right) + \varphi\left(z_{i+1}^{(t-1)}\right)}. \tag{6}$$

Приклад

Подати многочленним чебишовським сплайном з кількістю ланок *r=2* та степенем многочлена на кожній ланці *m=2* градуювальну характеристику платинового термометру опору, задану на проміжку від 273.16 K до 1234.94 K у вигляді:

$$\begin{aligned} W_r &= 3.317710817 \cdot 10^{-28} \cdot T^9 - 2.41281740710^{-24} \cdot T^8 + 7.42083383210^{-21} \cdot T^7 - \\ &- 1.25529582910^{-17} \cdot T^6 + 1.28006482810^{-14} \cdot T^5 - 8.18792811410^{-12} \cdot T^4 + \\ &+ 3.34219824710^{-9} \cdot T^3 - 1.45419522010^{-6} \cdot T^2 + 4.44110830710^{-3} \cdot T - 0.1421836301. \end{aligned}$$

У результаті обчислень отримуємо сплайн:

$$s(x) = \begin{cases} 0. & x < 273.16 \\ -.13215592 + \left(.0043047590 - .58508919\,10^{-6}x\right)x & x \le 879.3535668 \\ -.14529373 + \left(.004309062 - .60920869\,10^{-6}x\right)x & x \le 1234.94 \\ 0. & 1234.94 < x \end{cases}$$

Максимальна абсолютна похибка наближення при цьому дорівнює 0.000076.

Значення максимальної абсолютної похибки для інших значень r та m наведено у таблиці. Аналізуючи отриманий результат, слід зазначити, що наближення сплайном істотно зменшило вимоги до точності подання апроксимаційних параметрів наближення.

Похибка наближення многочленним чебишовським сплайном

Кількість ланок сплайну	Степінь многочлена на кожній ланці			
	1	2	3	4
1*	0.069011	0.000591	0.000177	0.000167
2	0.017450	0.000076	0.000039	$7.793 \cdot 10^{-7}$
3	0.007685	0.000050	$7.042 \cdot 10^{-6}$	$6.778 \cdot 10^{-7}$
4	0.004235	0.000019	$1.527 \cdot 10^{-6}$	$1.515 \cdot 10^{-7}$

Висновки. Отримані результати ілюструють доцільність застосування наближення сплайнами для подання градуювальних характеристик. Застосування сплайнів невеликих порядків дозволило спростити аналітичне подання характеристики і зробити її більш придатною для апаратної реалізації.

1. Techniques for Approximating the International Temperature Scale of 1990. BIPM_Sèvres, France,1990. 2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1986. – 272 с. 3. Попов Б. О., Сущик К. В. Дослідження збіжності ітераційної процедури для знаходження балансного наближення // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 16(92). – С. 137–141. 4. Попов Б. О., Сущик К. В. Точність наближення функцією від раціонального многочлена // Відбір і обробка інформ. – 2000. – Вип. 14(90). – С. 137–141. 5. Температурные измерения: Справочник.// О.А. Геращенко, А.Н. Гордов, В.И. Лах, – К.: Наук. думка, 1984. – 494 с.

* Під чебишовським сплайном з кількістю ланок *r=1* розуміємо найкраще чебишовське наближення.