УДК 621.315.592

О.П. Малик, Г.В. Кеньо, І.В. Петрович, І.С. Собчук
Національний університет “Львівська політехника”,
кафедра напівпровідникової електроніки

ПОБУДОВА ТОЧНОГО РОЗВ’ЯЗКУ СТАЦІОНАРНОГО РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА

Запропоновано метод побудови сукупності точних розв’язків стаціонарного рівняння Больцмана для однорідного напівпровідника з ізотропним законом дисперсії у випадку ефекту Холла та електропровідності. Визначено критерій відбору фізичних розв’язків серед сукупності математичних розв’язків рівняння Больцмана.

The way of construction of totality of the exact solutions of a stationary Boltzmann equation for the homogeneous semiconductor with the isotropic dispersion law is proposed in case of Hall effect and electrical conductivity. The criterion of selection of the physical solutions from totality of the mathematical solutions of Boltzmann equation is determined.

Вступ. Явища переносу в напівпровідниках описуються на основі рівняння Больцмана з використанням наближення часу релаксації або варіаційного методу [1–4]. Однак, ці методи є наближеними і тому не дозволяють відповісти на запитання: наскільки вибрані квантово-механічні моделі розсіяння носіїв заряду правильно описують фізичну реальність? Метою цієї роботи є точний розв’язок стаціонарного рівняння Больцмана, що дозволить безпосередньо визначити адекватність моделі розсіяння носіїв заряду фізичній реальності.

Розв’язання стаціонарного рівняння Больцмана. Розглянемо стаціонарне рівняння Больцмана для однорідного напівпровідника, що знаходиться в ізотермічних умовах, коли магнітне поле напрямлене вздовж осі “Z” $\boldsymbol{B} = \{0, 0, \mathrm{B}\}$, а електричне поле має компоненти $\boldsymbol{E} = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, 0\}$:

$$\left(q\,\boldsymbol{E} + q\left[\boldsymbol{vB}\right]\right)\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial\,\boldsymbol{p}} = \int\left\{W(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p})\,f(\boldsymbol{p}')\left[1-f(\boldsymbol{p})\right] - W(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\,f(\boldsymbol{p})\left[1-f(\boldsymbol{p}')\right]\right\}d\boldsymbol{p}', \qquad (1)$$

де $f(\boldsymbol{p})$ – функція розподілу; $\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\boldsymbol{p}}$ – швидкість носія заряду, q – заряд носія.

Припустимо, що перенос заряду здійснюється двома типами носіїв (електронами та дірками), закон дисперсії яких є ізотропний. Шукаємо розв’язок рівняння (1) у вигляді:

$$f_a(\boldsymbol{p}) = f_{0\,a}(\boldsymbol{p}) - \frac{\partial f_{0\,a}(\boldsymbol{p})}{\partial \varepsilon}\,\Phi_a(\varepsilon) \;, \tag{2}$$

де $a = 1, 2$ відповідно для електронів та дірок; $f_{0\,a}(\boldsymbol{p})$ – рівноважна функція Фермі–Дірака; $\Phi_a(\varepsilon)$ – невідомі функції.

Підставляючи (2) в (1), використовуючи принцип детальної рівноваги та співвідношення:

$$\frac{\partial f_{0\,1}(\boldsymbol{p})}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{k_B T}\, f_{0\,1}(\boldsymbol{p})\left[1 - f_{0\,1}(\boldsymbol{p})\right]; \qquad \frac{\partial f_{0\,2}(\boldsymbol{p})}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{k_B T}\, f_{0\,2}(\boldsymbol{p})\left[1 - f_{0\,2}(\boldsymbol{p})\right] \;, \tag{3}$$

отримаємо систему рівнянь для функцій $\Phi_a(\varepsilon)$ $(a = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} & q_a\, \mathbf{E}\, \mathbf{v}_a \frac{\partial f_{0\,a}(\mathbf{p})}{\partial \varepsilon} - \mathrm{q}_a \left[\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}\right] \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f_{0\,a}(\mathbf{p})}{\partial \varepsilon} - q_a\, \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\,a}(\mathbf{p})}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} - \\ & - q_a\, \mathbf{E}\, \mathbf{v}_a \Phi_a(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 f_{0\,a}}{\partial \varepsilon^2} = \sum_{b=1}^{2} \pm \frac{1}{k_B T} \int \{ W_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, f_{0\,a}(\mathbf{p}) \times \\ & \times \left[1 - f_{0\,a}(\mathbf{p}')\right]\left[\Phi_a(\mathbf{p}') - \Phi_a(\mathbf{p})\right]\} d\mathbf{p}' + \frac{1}{k_B{}^2 T^2} \int \{ W_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, f_{0a}(\mathbf{p})\left[1 - f_{0a}(\mathbf{p}')\right] \times \\ & \times \left[f_{0a}(\mathbf{p}') - \mathrm{f}_{0a}(\mathbf{p})\right]\} \Phi_a(\mathbf{p}')\, \Phi_a(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}' , \end{aligned} \tag{4}$$

де $W_{ab}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ – ймовірність переходу носія заряду зі стану з квазіімпульсом $\boldsymbol{p}$ в зоні “*a*” в стан з квазіімпульсом $\boldsymbol{p}'$ в зоні “*b*”; верхній знак перед першим інтегралом в правій частині рівняння стосується до електронів, а нижній – дірок.

Зазначимо, що рівняння (4) відрізняється від відомого рівняння Блоха, яке отримане шляхом лінеаризації рівняння Больцмана, наявністю двох останніх доданків у лівій частині рівняння та наявністю другого доданку в правій частині рівняння, який відсутній у випадку пружного розсіяння носіїв.

Шукаємо невідомі функції $\Phi_a(\varepsilon)$ у вигляді:

$$\Phi_a(\mathbf{p}) = \sum_{n,\,\alpha} \mathrm{C}^{\alpha}_{n\,a}\; p_\alpha(\varepsilon)\; \varepsilon^n \tag{5}$$

де $C^{\alpha}_{n\,a}$ – невідомі коефіцієнти; n = 0,1,2,3.. , a = 1,2 відповідно для електронів і дірок; α = 1,2,3 ; $p_\alpha(\varepsilon)$ – компонента квазіімпульсу.

Подставимо (5) в рівняння Больцмана (4), помножимо це рівняння на $p_\beta(\varepsilon)\,\varepsilon^m$ (m= 0,1,2,3… , β = 1,2,3) і проінтегруємо обидві його частини за квазіімпульсом.

При інтегрируванні лівої частини рівняння (4) переходимо до сферичної системи координат, тоді отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&\int q\,\mathbf{E}\,\mathbf{v}\frac{\partial f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon}p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}d\mathbf{p}=\frac{2\mathrm{V}}{(2\pi)^3}\frac{4}{3}\pi\left(\delta_{\beta1}\mathrm{E}_1+\delta_{\beta2}\mathrm{E}_2\right)\mathrm{q}\int_{\mathrm{a}}\frac{\partial \mathrm{f}_{0a}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\times\\
&\times\mathrm{k}(\varepsilon)^3\,\varepsilon^{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{B}^{\mathrm{m}}_{\beta a};\\
&-\int\mathrm{q}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]\frac{\partial\Phi_a(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon}p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\mathbf{p}=-\frac{2\mathrm{V}}{(2\pi)^3}\frac{4}{3}\pi\sum_{n,\alpha}(\delta_{\alpha1}\delta_{\beta2}-\\
&-\delta_{\alpha2}\delta_{\beta1})\ \mathrm{C}^{\alpha}_{\mathrm{n}\,a}\,\mathrm{qB}\int_a\frac{\partial\mathrm{f}_{0a}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\ \mathrm{k}(\varepsilon)^3\,\varepsilon^{\mathrm{m+n}}\,\mathrm{d}\varepsilon=-\sum_{n,\alpha}\mathrm{C}^{\alpha}_{\mathrm{n}\,a}\,\mathrm{M}^{\mathrm{m\,n}}_{\beta\,\alpha\,a}\ ;\\
&-\int q_a\,\mathbf{E}\frac{\partial f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\Phi_a(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\mathbf{p}=-q_a\sum_{n,\alpha,\gamma}\int_a\frac{\partial f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon}E_\gamma C^{\alpha}_{n\,a}\times\\
&\times\left[\delta_{\alpha\gamma}+n\,\varepsilon^{\mathrm{n-1}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{k}}\ \frac{\mathrm{k}_\alpha\,k_\gamma}{k}\right]p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m+n}}\mathrm{d}\mathbf{p}=0\,;\\
&-\int q_a\,\mathbf{E}\,\mathbf{v}_a\Phi_a(\mathbf{p})\frac{\partial^2 f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon^2}p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\mathbf{p}=-q_a\sum_{n,\alpha,\gamma}\int_a E_\gamma\,\frac{\hbar}{m_a^*}k_\gamma\times\\
&\times C^{\alpha}_{n\,a}\,k_\alpha\,\frac{\partial^2 f_{0a}(\mathbf{p})}{\partial\varepsilon^2}p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m+n}}\mathrm{d}\mathbf{p}=0\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де $k(\varepsilon)$ – модуль хвильового вектора, V – об'єм кристала, $\delta_{\alpha\beta}$ – символи Кронекера, а при інтегруванні враховано співвідношення:

$$
\frac{\partial\Phi_a(\boldsymbol{p})}{\partial p_\beta}=C^{\alpha}_{n\,a}\left[\delta_{\alpha\beta}+n\,\varepsilon^{n-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k}\ \frac{k_\alpha\,k_\beta}{k}\right];\ . \tag{7a}
$$

$$
\iint p_\alpha(\varepsilon)\,p_\beta(\varepsilon)\ \sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\frac{4}{3}\pi|\,\boldsymbol{p}\,|^2\,\delta_{\alpha\beta} \tag{7b}
$$

При інтегруванні правої частини рівняння (4) візьмемо до уваги, що ймовірність переходу носія $W_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ пропорційна δ-функції Дірака:

$$
W_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')=W'_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\Delta)\,, \tag{8}
$$

де $W'_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ – деяка функція; Δ – деяка енергія, яка дорівнює нулю при пружному механізмі розсіяння.

Для обчислення першого доданку в правій частині рівняння перейдемо до сферичної системи координат відносно $\boldsymbol{p}'$, скерувавши вісь OZ вздовж вектора $\boldsymbol{p}$. Тоді интеграл за станом $\boldsymbol{p}'$ в зоні "*b*" набуде вигляду:

$$
\begin{aligned}
&\int_b\left\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_{0a}(\mathbf{p})\left[1-f_{0a}(\mathbf{p}')\right]\left[\Phi_a(\mathbf{p}')-\Phi_a(\mathbf{p})\right]\right\}d\mathbf{p}'=\\
&=\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{n,\alpha}C^{\alpha}_{n\,a}\int_{\mathrm{b}}\left\{W'_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_{0a}(\mathbf{p})\left[1-f_{0a}(\mathbf{p}')\right]\left[p'_\alpha(\varepsilon')\varepsilon'^{\,\mathrm{n}}-p_\alpha(\varepsilon)_\alpha\varepsilon^n\right]\right\}\times\\
&\times p'^{\,2}(\varepsilon')\sin\theta'\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\Delta)\frac{dp'(\varepsilon')}{d\varepsilon'}d\varepsilon'd\theta'd\varphi'=\sum_{n,\alpha}C^{\alpha}_{n\,a}F_1(\varepsilon)-C^{\alpha}_{n\,a}\,\mathrm{F}_2(\varepsilon)\,p_\alpha(\varepsilon)\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де $F_1(\varepsilon)$ и $F_2(\varepsilon)$ – відомі функції енергії.

При повторному інтегруванні співвідношення (9) за станом вектора $\boldsymbol{p}$ перейдемо до сферичної системи координат – тоді перший доданок при інтегруванні за кутами дає нуль. Інтеграл для другого доданку, з врахуванням явного вигляду функції $F_2(\varepsilon)$ та співвідношення (7b), набуде вигляду:

$$\iint\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\, f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][\Phi_a(\mathbf{p}')-\Phi_a(\mathbf{p})]\}\, p_\beta(\varepsilon)\,\varepsilon^{\mathrm{m}} d\mathbf{p}'\, d\mathbf{p} = \\ = -\frac{4V^2}{(2\pi\hbar)^6}\sum_{n,\alpha} C^\alpha_{na}\frac{4}{3}\pi\delta_{\alpha\beta}\int_a W'_{ab}(\varepsilon) f_{0a}(\varepsilon)[1-f_{0a}(\varepsilon+\Delta)]\varepsilon^{n+m} p(\varepsilon)^4 p(\varepsilon+\Delta)^2\times \\ \times\frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\frac{\partial p(\varepsilon+\Delta)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\ , \tag{10}$$

де $W'_{ab}(\varepsilon)$ визначається виразом:

$$W'_{ab}(\varepsilon)=\int W'_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\, sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'\ . \tag{10a}$$

Перейшовши від інтегрування за квазіімпульсом до інтегрування за хвильовим вектором, знайдемо кінцевий вираз, що отримується при інтегруванні першого доданку в правій частині рівняння Больцмана:

$$\pm\frac{1}{k_BT}\iint\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\, f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][\Phi_a(\mathbf{p}')-\Phi_a(\mathbf{p})]\}\, p_\beta(\varepsilon)\,\varepsilon^{\mathrm{m}} d\mathbf{p}'\, d\mathbf{p} = \\ = \mp\frac{4V^2}{(2\pi)^6}\sum_{n,\alpha} C^\alpha_{na}\frac{4\pi\hbar^2\delta_{\alpha\beta}}{3k_BT}\int_a W'_{ab}(\varepsilon)\, f_{0a}(\varepsilon)[1-f_{0a}(\varepsilon+\Delta)]\varepsilon^{n+m}k(\varepsilon)^4\times \\ k(\varepsilon+\Delta)^2\frac{\partial k(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\frac{\partial k(\varepsilon+\Delta)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=\sum_{n,\alpha} C^\alpha_{na}\,\mathrm{K}^{nm}_{\beta\alpha\ ba}\ . \tag{10b}$$

Аналогічно інтегруємо другий доданок в правій частині рівняння Больцмана. У цьому випадку інтеграл за станом $\boldsymbol{p}'$ в зоні "b" набуває вигляду:

$$\int_b\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\, f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][f_{0a}(\mathbf{p}')-\mathrm{f}_{0a}(\mathbf{p})]\}\Phi_a(\mathbf{p}')\Phi_a(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}' = \\ =\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{n,\ell,\alpha,\chi} C^\alpha_{na}C^\gamma_{\ell a}\int_b\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\, f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][f_{0a}(\mathbf{p}')-\mathrm{f}_{0a}(\mathbf{p})]\}p'_\gamma(\varepsilon')\times \\ \times p_\alpha(\varepsilon)\ \varepsilon'^{\ \ell}\,\varepsilon^n p'^{\,2}(\varepsilon')\, sin\theta'\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\Delta)\ \frac{dp'(\varepsilon')}{d\varepsilon'}d\varepsilon'\, d\theta'\, d\varphi' = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\times \\ \times\sum_{n,\ell,\alpha} C^\alpha_{na}C^3_{\ell a}\, W''_{ab}(\varepsilon)\, f_{0a}(\varepsilon)[1-f_{0a}(\varepsilon+\Delta)][f_{0a}(\varepsilon+\Delta)-\mathrm{f}_{0a}(\varepsilon)]p_\alpha(\varepsilon)\times \\ \times(\varepsilon+\Delta)^\ell\varepsilon^n p(\varepsilon+\Delta)^3\frac{\partial\,\mathrm{p}(\varepsilon+\Delta)}{\partial\,\varepsilon}, \tag{11}$$

де $W''_{ab}(\varepsilon)$ визначається співвідношенням:

$$W''_{ab}(\varepsilon)=\int W_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')\, cos\theta'\sin\theta' d\theta' d\varphi'\ , \tag{12}$$

а також враховано, що ймовірність розсіяння залежить тільки від кута θ.

Повторно інтегруючи співвідношення (11) за станами вектора $\boldsymbol{p}$, отримаємо:

$$\frac{1}{k_B{}^2T^2}\iint\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][f_{0a}(\mathbf{p}')-\mathrm{f}_{0a}(\mathbf{p})]\}\Phi_a(\mathbf{p}')\Phi_{\mathrm{a}}(\mathbf{p})\times$$
$$\times p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{p}=\frac{4V^2}{(2\pi\hbar)^6}\frac{4\pi\,\delta_{\alpha\beta}}{3k_BT}\sum_{n,\ell,\alpha}C^{\alpha}_{na}C^{3}_{\ell a}\int_a W''_{ab}(\varepsilon)\,f_{0a}(\varepsilon)[1-f_{0a}(\varepsilon+\Delta)]\times \qquad (13)$$
$$\times[f_{0a}(\varepsilon+\Delta)-\mathrm{f}_{0a}(\varepsilon)](\varepsilon+\Delta)^{\ell}\varepsilon^{n+m}p(\varepsilon+\Delta)^3\frac{\partial\,\mathrm{p}(\varepsilon+\Delta)}{\partial\varepsilon}p(\varepsilon)^4\frac{\partial\,\mathrm{p}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon\ .$$

Перейшовши до інтегрування за квазіімпульсом, отримаємо для другого доданку в правій частині рівняння Больцмана:

$$\frac{1}{k_B{}^2T^2}\iint\{W_{ab}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\,f_{0a}(\mathbf{p})[1-f_{0a}(\mathbf{p}')][f_{0a}(\mathbf{p}')-\mathrm{f}_{0a}(\mathbf{p})]\}\Phi_a(\mathbf{p}')\Phi_a(\mathbf{p})\times$$
$$\times p_\beta(\varepsilon)\varepsilon^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\mathbf{p}'\,\mathrm{d}\mathbf{p}=\frac{4V^2}{(2\pi)^6}\frac{4\pi\hbar^3\,\delta_{\alpha\beta}}{3k_B{}^2T^2}\sum_{n,\ell,\alpha}C^{\alpha}_{na}C^{3}_{\ell a}\int_a W''_{ab}(\varepsilon)\,f_{0a}(\varepsilon)\times$$
$$\times[1-f_{0a}(\varepsilon+\Delta)][f_{0a}(\varepsilon+\Delta)-f_{0a}(\varepsilon)](\varepsilon+\Delta)^{\ell}\varepsilon^{n+m}k(\varepsilon+\Delta)^3\frac{\partial\,\mathrm{k}(\varepsilon+\Delta)}{\partial\varepsilon}\times \qquad (14)$$
$$\times k(\varepsilon)^4\frac{\partial\,\mathrm{k}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=\sum_{n,\ell,\alpha}C^{3}_{\ell a}C^{\alpha}_{na}\,L^{mn\ell}_{\beta\alpha\,ba}.$$

Зазначимо, що при заданих законах дисперсії $k(\varepsilon)$ та ймовірностях розсіяння $W_{ab}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ величини *K*, *L*, *M*, *B* завжди можуть бути визначені з будь-яким заданим ступенем точності.

Отже, в результаті інтегрування рівняння Больцмана зводяться до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин C^{α}_{na} для електронів та дірок:

$$\sum_{n,\alpha,b}C^{\alpha}_{na}\,\mathrm{K}^{mn}_{\beta\alpha ba}+\sum_{n,\ell,\alpha,b}C^{3}_{\ell a}\,C^{\alpha}_{na}\,\mathrm{L}^{mn\ell}_{\beta\alpha ba}=\mathrm{B}^{m}_{\beta a}-\sum_{n,\alpha}C^{\alpha}_{na}\,\mathrm{M}^{mn}_{\beta\alpha a} \qquad (15)$$

Для подальшого анализу перепишемо (15) в іншому вигляді, виділивши електронну та діркову компоненти, а також β – компоненти рівнянь*):

$$\begin{cases}
C^{1}_{n1}(K^{mn}_{11\,11}+K^{mn}_{11\,12}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{11\,11}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{11\,12})+C^{2}_{n1}M^{nm}_{12\,1}=B^{m}_{11}\\
C^{2}_{n1}(K^{mn}_{22\,11}+K^{mn}_{22\,12}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{22\,11}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{22\,12})+C^{1}_{n1}M^{nm}_{21\,1}=B^{m}_{21}\\
C^{3}_{n1}(K^{mn}_{33\,11}+K^{mn}_{33\,12}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{33\,11}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{33\,12})=0\\
C^{3}_{n2}(K^{mn}_{33\,22}+K^{mn}_{33\,21}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{33\,21}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{33\,22})=0\\
C^{2}_{n2}(K^{mn}_{22\,22}+K^{mn}_{22\,21}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{22\,21}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{22\,22})+C^{1}_{n2}M^{nm}_{21\,2}=B^{m}_{22}\\
C^{1}_{n2}(K^{mn}_{11\,22}+K^{mn}_{11\,21}+C^{3}_{\ell 1}L^{mn\ell}_{12\,21}+C^{3}_{\ell 2}L^{mn\ell}_{12\,22})+C^{2}_{n2}M^{nm}_{12\,1}=B^{m}_{12}
\end{cases} \qquad (15a)$$

* У виразі (15а) використовується прийняте в тензорній алгебрі правило підсумовування за індексами, що двічі повторюються.

Систему (15а) можна розв'язати за два етапи: 1) для заданого значення m = 0,1,2.. знаходимо $C^{3}_{n\,1}$ та $C^{3}_{n\,2}$ (n=0,1,2..) з 3-го та 4-го рівнянь системи, які складають систему нелінійних алгебраїчних рівнянь; 2) знаходимо $C^{1}_{n\,1}$, $C^{2}_{n\,1}$ та $C^{1}_{n\,2}$, $C^{2}_{n\,2}$ (n=0,1,2...) відповідно з 1-го,2-го та 5-го,6-го рівнянь системи, які складають дві незалежні системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що величини $C^{\alpha}_{n\,a}$ (α=1,2; b=1,2;n=0,1,2..) є лінійними функціями компонентів вектора напруженості електричного поля **E**.

Система нелінійних алгебраїчних рівнянь для $C^{3}_{n\,1}$ і $C^{3}_{n\,2}$ може мати такі типи розв'язку: а) $C^{3}_{n\,1} = C^{3}_{n\,2} = 0$; б) $C^{3}_{n\,1} = 0$, $C^{3}_{n\,2} \neq 0$; в) $C^{3}_{n\,1} \neq 0$, $C^{3}_{n\,2} = 0$, г) $C^{3}_{n\,1} \neq 0$, $C^{3}_{n\,2} \neq 0$. Тому виникає необхідність вибору фізичних розв'язків серед сукупності математичних розв'язків системи. Для формулювання критерію вибору обчислимо попередньо компоненти вектора густини струму:

$$J_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\sum_{a}\int\left(\frac{\partial f_{0a}}{\partial\varepsilon}\right)q_a v_{a\,\alpha}\,\Phi_a\,d\mathbf{p} = -\frac{1}{3\pi^2}\sum_{a,n}q_a C^{\alpha}_{n\,a}\int\left(\frac{\partial f_{0a}}{\partial\varepsilon}\right)k(\varepsilon)^3\,\varepsilon^n\,d\varepsilon \qquad (16)$$

Сформулюємо такий критерій вибору : $J_z = J_{z\,n} + J_{z\,p} = 0$, где $J_{z\,n}$, $J_{z\,p}$ – відповідно електронна та діркова складові z-компоненти вектора густини струму. Цей критерій задовольняє розв'язок типу (а), решта типів розв'язку при значенні індукції магнітного поля **B**=0 перетворюють детермінанти систем лінійних рівнянь для величин $C^{1}_{n\,1}$ та $C^{1}_{n\,2}$ (1-е та 6-е рівняння системи (2а)) в нуль, тобто є фізично беззмістовні і тому повинні бути відкинуті.

Для відбору фізичних розв'язків серед розв'язків типу (а) необхідно визначити при заданому значенні n = 0,1,2 … компоненти тензора провідності і порівняти їх з експериментом. Для обчислення компонент тензора провідності скористаємося тим, що величини $C^{1}_{n\,a}$(a =1,2) є лінійними функціями E_1 та E_2, тоді J_α (α=1,2) теж будуть лінійно залежати від них, а величини при них будуть рівні відповідним компонентам тензора провідності σ_{11} и σ_{12} для електронів та дірок.

*1. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. – М.: Наука, 1978. 2. Дыкман И.М., Томчук П.М. Явления переноса и флуктуации в полупроводниках. – К.: Наукова думка, 1981. 3. Kohler M. // Z. Physik. – 1948. **124**. – P.772–777. 4. Sondheimer E.H. // Proc. Roy. Soc. 1950. – **A203**. P.75–81.*