наростаючими темпами продовжується безпрецедентна популяризація геопросторової інформації та ГІС-технологій для потреб суспільства. Проте стримуючим фактором все ще лишається відсутність кваліфікованого кадрового потенціалу, здатного використати надані можливості.

З іншого боку, ефективне використання сучасних ГІС стримується ще й технічними факторами. Досліджуючи сайти, на котрих розміщена інформація такого класу, нами було проведено аналіз ефективності завантаження залежно від природи графічної інформації.

УДК 518.9; 519.2

П.О. Кравець
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра “Інформаційні системи та мережі”

МЕТОДИ РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ

It is investigated efficiency of methods of consecutive and parallel random search for a solution of optimization problems in conditions of uncertainty.

Досліджено ефективність методів послідовного та паралельного випадкового пошуку для розв’язування оптимізаційних задач в умовах невизначеності.

ВСТУП

Для розв’язування задач багатоаргументної оптимізації систем в умовах невизначеності використовуються методи випадкового пошуку [1]. На відміну від детермінованих методів, випадковий пошук вимагає значних затрат пошукових кроків, кількість яких залежить від розмірності пошукового простору. Тому актуальним, особливо для систем реального часу, є розроблення таких методів випадкового пошуку, які дозволяють знайти оптимальний розв’язок за якомога меншу кількість кроків.

Значне скорочення кількості пошукових кроків може бути досягнуто шляхом розпаралелювання задачі випадкового пошуку, наприклад, застосуванням ігрового [2], генетичного [3] методів, оптимізації колективом автоматів [4] та інших.

Ефективними методами паралельного пошуку можуть бути такі, що побудовані на одночасному пошуку в окремих підобластях простору визначення функції або одночасному виборі значень кожного із її аргументів. Робота таких методів в умовах невизначеності є недостатньо висвітлена у літературних джерелах.

У статті досліджується ефективність розпаралелювання багатоаргументної задачі випадкового пошуку в умовах невизначеності методом одночасного вибору дискретних значень кожного з аргументів. Метою розпаралелювання є зменшення кількості пошукових кроків.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу мінімізації багатоаргументної дискретно визначеної функції $f(x) \in R^1$ в умовах дії завад $\mu \in R^1$ з невідомим законом розподілу:

$$\xi(x) = f(x) + \mu \to \min, \tag{1}$$

де $\xi(x)$ – доступна для спостереження функція; $x=(x_i \mid i=\overline{1,m})$ – вектор аргументів, елементи якого набувають дискретні значення $x_i \in X_i=\{x_i(j) \mid j=\overline{1,N_i}\}$, визначені у просторі дійсних чисел $X_i \subset R^1$. Повний простір визначення функції задається декартовим добутком $X=\underset{i}{\otimes} X_i$, $X \subset R^m$ і складається з $I=\prod_{i=1}^{m} N_i$ значень дискретних елементів $x \in X$.

Для розв’язування задачі (1) використаємо методи випадкового пошуку. Розглянемо два підходи до побудови методів випадкового пошуку залежно від розмірності пошукового простору.

Перший підхід базується на редукції багатовимірного пошукового простору до одновимірного (зведенні багатовимірної задачі до одновимірної). Для цього пронумеруємо значення аргументів x на основі їх послідовного обходу

$$I_x=\sum_{i=1}^{m}(j_i-1)\prod_{k=1}^{i-1} N_k+1, \tag{2}$$

де I_x – порядковий номер точки $x=(x^i(j_i) \mid i=\overline{1,m})$; $1 \le I_x \le I$; $j_i=\operatorname{index}(x^i)$; $1 \le j_i \le N_i$. У виразі (2) результат операції добутку від більшого значення індексу до меншого дорівнює 1.

Генерування випадкових варіантів пошуку відбувається за допомогою імовірностей $p=(p(j) \mid j=\overline{1,I})$, $\sum_{j=1}^{I} p(j)=1$, які загалом визначають розподіл дискретних випадкових величин. Поточний номер варіанта пошуку I_x визначається із виконання умови:

$$\min_{I_x} \sum_{j=1}^{I_x} p(j) \ge \omega, \tag{3}$$

де $\omega \in [0,1]$ – дійсне випадкове число з рівномірним законом розподілу.

Вибір варіанта I_x відповідає значенням параметрів $x=(x^i(j_i) \mid i=\overline{1,m})$ з індексами

$$j_i=\frac{I_x-\sum_{k=1}^{i-1}(j_k-1)\prod_{l=1}^{k-1} N_l-1}{\prod_{k=1}^{i-1} N_k} \bmod N_i+1. \tag{4}$$

У виразі (4) результат операції суми від більшого значення індексу до меншого дорівнює нулю.

Другий підхід базується на багатовимірності пошукової задачі. Він є більш природним, оскільки не вимагає попереднього перетворення пошукового простору. Будемо вважати, що дискретні значення i-го параметра вибираються з імовірностями $p^i=(p^i(j) \mid j=\overline{1,N_i})$, $\sum_{j=1}^{N_i} p^i(j)=1$. Генерування значень параметрів відбувається паралельно у часі за допомогою групи генераторів випадкових величин. Поточні номери варіантів пошуку $j_i(i=\overline{1,m})$ визначаються з виконання умови:

$$\min_{j_i} \sum_{k=1}^{j_i} p^i(k) \geq \omega^i, \qquad (5)$$

де $\omega^i \in [0,1]$ – дійсні випадкові числа з рівномірним законом розподілу.

Для змістовного формулювання проблеми розглянемо задачу пошуку об'єкта, координати якого задаються деяким випадковим розподілом. Тоді функція (1) визначає відстань до об'єкта і має вигляд

$$\xi(x) = \|x - y\|, \qquad (6)$$

де $y \sim Z(m_y, d_y)$ – координата шуканого об'єкта, яка є випадковою величиною зі значеннями у просторі X, з математичним сподіванням m_y та дисперсією d_y, розподілена за законом Z. Будемо вважати, що стохастичні характеристики шуканого об'єкта є апріорі невідомими.

Нехай випадковий пошук об'єкта здійснюється у дискретні моменти часу $n = 1,2...$. Тоді $x_n \in X$ визначає поточне наближення до оптимального розв'язку, $y_n \in X$ – поточне значення координати шуканого об'єкта, $\xi_n \in R^1$ – поточну відстань до шуканого об'єкта. Розв'язування пошукової задачі в умовах невизначеності полягає у розробленні стратегії пошуку об'єкта, яка забезпечує мінімізацію функції середньої відстані

$$\Phi_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \xi_t \to \min. \qquad (7)$$

На практиці момент закінчення пошуку можна визначити з умови поточного досягнення об'єкта

$$n_{out} = \left(n : \xi_n \leq r, n = 1, 2, ...\right),$$

де $r \geq 0$ – мінімально необхідне наближення до об'єкта.

Методи випадкового пошуку. Пошук об'єкта виконаємо за допомогою випадкового процесу $x_n = x$, керованого векторами імовірностей розподілу координат.

Залежно від кількості таких векторів визначимо такі методи випадкового пошуку:

1) послідовні;

2) паралельні.

Методи послідовного пошуку використовують один вектор імовірностей $p_n = (p_n(j) \mid j = \overline{1, I})$ для вибору варіантів згідно із (3), (4). Такі методи не реалізують розпаралелювання випадкового пошуку.

Методи паралельного пошуку використовують $m > 1$ векторів $p_n{}^i = (p_n{}^i(j) \mid j = \overline{1, N_i})$, $i = \overline{1, m}$ для одночасного вибору варіантів згідно із (5).

Залежно від можливості зміни значень імовірностей розподілу координат пошукового процесу будемо розрізняти такі методи випадкового пошуку:

1) статичні;

2) динамічні.

Статичними методами здійснюють вибір варіантів з постійними значеннями імовірностей протягом всього часу пошуку.

Динамічними методами змінюють значення імовірностей в процесі пошуку.

Залежно від можливості закріплення кращих поточних наближень до оптимального розв'язку пошукової задачі виділимо такі методи:

1) неселективні;

2) селективні.

Неселективними методами не виконують запам'ятовування кращих поточних наближень до оптимального розв'язку пошукової задачі.

Селективними методами у процесі пошуку знаходять найкраще поточне наближення до оптимального розв'язку, яке на момент завершення пошуку приймається за оптимальний розв'язок [5].

Дискретність та скінченна кількість варіантів пошуку робить можливим *ігрове формулювання пошукової задачі* [2, 6]. Тоді варіанти пошуку є чистими, а імовірності їх вибору – змішаними стратегіями. Відповідно вищезазначені методи можна розглядати як різновидності стохастичних ігор зі статичними та динамічними змішаними стратегіями.

Виділені методи можуть бути реалізовані в одновимірному або багатовимірному пошуковому просторі. Для одновимірного пошукового простору це є *гра з природою* (послідовний пошук), а для багатовимірного – *гра m осіб* (паралельний пошук).

Виконаємо формалізований опис деяких із визначених методів, а саме: статичних неселективних, статичних селективних та динамічних селективних.

Статичні неселективні методи. Особливістю статичних методів є виконання умови

$$p_n^i(j_i) \in [0,1] = \text{const}, \; j_i = \overline{1, N_i}, \; i = \overline{1, m}$$

для всіх $n = 1,2...$ Статичні неселективні методи є методами без запам'ятовування кращих поточних наближень до оптимального розв'язку. Вибір поточних варіантів пошуку здійснюється згідно із (4). Зупинка роботи методу визначається виконанням умови $\xi(x_n) = 0$.

Будемо досліджувати вплив значення імовірності вибору оптимального варіанта на ефективність пошукового методу. Нехай математичне сподівання мінімуму функції досягається у точці $x = (x^i(j_i^*) \,|\, i = \overline{1, m})$. Будемо вважати, що імовірність вибору мінімального значення за i-м координатним напрямком дорівнює $p^i(j_i^*)$, а імовірності вибору інших (неоптимальних) значень є однаковими і дорівнюють $\dfrac{1 - p^i(j_i^*)}{N_i - 1}$.

Еквівалентні початкові умови роботи послідовного та паралельного методів досягаються однаковим розподілом імовірностей вибору дискретних значень аргументів функції. Імовірності колективного вибору варіантів (або варіантів послідовного методу) визначаються так:

$$p(I_x) = \prod_{j_i \neq j_i^*} \frac{1 - p^i(j_i^*)}{N_i - 1} \prod_{j_i = j_i^*} p^i(j_i^*), \text{ якщо } 0 < p^i(j_i^*) < 1;$$

$$p(I_x) = \prod_{i=1}^{m} (N_i - 1)^{-1}, \text{ якщо } p^i(j_i^*) = 0; \tag{8}$$

$$p(I_x) = 1, \text{ якщо } p^i(j_i^*) = 1.$$

Різновидом неселективних статичних методів є метод рівноімовірного пошуку (RND-метод), коли значення усіх імовірностей вибору варіантів є однаковими $p^i(j) = 1/N_i$, $j = \overline{1, N_i}$, $i = \overline{1, m}$. Тоді імовірність колективного вибору одного із варіантів, або імовірність вибору варіанта для послідовного методу, дорівнює $p(I_x) = \prod_{i=1}^{m} N_i^{-1}$.

Змінюючи значення $p^i(j_i^*)$ від 0 до 1, отримаємо ряд модифікацій пошукового методу із статичними розподілами імовірностей.

Статичні селективні методи. Імовірності вибору варіантів у селективних статичних методах задаються так само, як у неселективних статичних методах. Відмінність полягає у можливості запам'ятовування кращих поточних наближень до оптимального розв'язку. Селективні статичні методи визначають кращий поточний розв'язок

$$\tilde{x}_n^i = \arg \min_{t=\overline{1,n}} \xi_t^i(x_t^i) \qquad (9)$$

і використовують його для визначення умови зупинки: $\xi(\tilde{x}_n) \le r$.

Динамічні селективні методи. Нехай чисті стратегії вибираються з умовними імовірностями $p_n^i(j) = P\left\{x_n^i = x^i(j) \middle| \xi_t^i, x_t^i, t = \overline{1, n-1}\right\}$, значення яких залежать від передісторії зміни випадкових процесів ξ_t^i та x_t^i. Вектори p_n^i, де $i = \overline{1, m}$ визначають динамічні змішані стратегії гравців, які набувають значення на одиничних ε–симплексах:

$$S_\varepsilon^{N_i} = \left\{p^i \mid p^i \in S^{N_i}; p^i(j) \ge \varepsilon \ (j = \overline{1, N_i})\right\}, \ \varepsilon \in (0, \min_i N_i^{-1}).$$

Метод зміни елементів вектора змішаних стратегій побудуємо так, що при виборі стратегії $x_n^i(j)$ меншим значенням ξ_n^i відповідатимуть більші прирости елемента $p_n^i(j)$. Для забезпечення належності вектора p_n^i одиничному симплексу при необхідності виконаємо нормування його елементів.

Загальне рекурентне перетворення векторів змішаних стратегій матиме вигляд:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}\left\{p_n^i - \gamma_n R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i)\right\}, \qquad (10)$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ – проектор на одиничний ε – симплекс, що забезпечує виконання умови $p_{n+1}^i \in S_\varepsilon^{N_i}$; γ_n – монотонно спадна послідовність невід'ємних величин, яка регулює величину кроку методу; $\varepsilon_n \in (0, \min_i N_i^{-1})$ – монотонно спадна послідовність величин, що регулює розширення одиничного ε – симплексу; R – крок методу.

Проектування на одиничний ε – симплекс при фіксованому значенні n полягає у розв'язуванні задачі умовної мінімізації функції

$$\left\|q_n^i - p_n^i\right\|^2 \to \min_{p_n^i}$$

з обмеженнями $\sum_{j=1}^{N_i} p_n^i(j) = 1$, $p_n^i(j) \ge \varepsilon_n$, де $q_n^i \in R^{N_i}$. Ця задача може бути розв'язана, наприклад, методом множників Лагранжа [7].

Параметри методу γ_n та ε_n визначають умови та швидкість збіжності ігрового методу. Для комп'ютерного моделювання можна прийняти, що

$$\gamma_n = \gamma_0 n^{-\alpha}, \; \varepsilon_n = \varepsilon_0 n^{-\beta}, \tag{11}$$

де $\gamma_0, \alpha, \beta > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min_i N_i^{-1})$. Конкретні значення параметрів α та β визначаються з умов збіжності ігрового методу [2].

Будемо досліджувати вплив ігрових стратегій на ефективність описаних пошукових методів.

ЕФЕКТИВНІСТЬ ТА ТОЧНІСТЬ МЕТОДІВ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ

Ефективність методів випадкового пошуку визначається середньою кількістю кроків $\overline{n}^*$, необхідних для досягнення мінімуму досліджуваної функції:

$$\overline{n}^* = M\{n^* \mid \xi(x) \le r\},$$

де n^* – випадкова кількість кроків на момент завершення пошуку.

Точність методів випадкового пошуку визначається відхиленням середніх координат точки мінімуму $\overline{x}^* = M\{x^* \mid \xi(x) \le r\}$ від координат його математичного сподівання m_y:

$$\Delta = \left\| \overline{x}^* - m_y \right\|.$$

Ефективнішим будемо вважати той метод, який у середньому потребує меншої кількості кроків та забезпечує кращу точність локалізації математичного сподівання мінімуму функції.

АЛГОРИТМИ ВИПАДКОВОГО ПОШУКУ

Наведемо узагальнені алгоритми послідовного та паралельного випадкового пошуку, які працюють зі статичними або динамічними розподілами імовірностей.

<u>Алгоритм послідовного пошуку</u>

Крок 1. Ініціалізація алгоритму. Задати початковий момент часу $n = 0$, розмірність пошукового простору m, кількості значень пошукових варіантів N_i за кожним координатним напрямком $i = \overline{1, m}$, математичне сподівання $m_y = (m_y(j) \mid j = \overline{1, m})$, $m_y \in X$ та дисперсію $d_y \in R_+^m$ координат шуканого об'єкта, початкові значення імовірностей вибору координат p_0^i. Для початкового рівноімовірного вибору варіантів необхідно задати $p_0^i(j) = 1/N_i$, $j = \overline{1, N_i}$.

Обчислити значення імовірностей послідовного методу згідно із (8), де індекс I_x визначається методом послідовного обходу комбінацій варіантів згідно із (2).

Для динамічних селективних методів додатково задаються параметри алгоритму α та β.

Крок 2. Визначення поточної позиції об'єкта. Задати наступний момент часу $n = n + 1$. Координати шуканого об'єкта визначаються як випадкові числа, розподілені за нормальним законом $y_n \sim N(m_y, d_y)$. Для заборони виходу об'єкта за межі досліджуваної області накладається обмеження $y_n \in X$.

Крок 3. Визначення координат поточного наближення до шуканого об'єкта. Згенерувати випадкове число $\omega \in [0,1)$ за допомогою вбудованого генератора випадкових величин за рівномірним законом та використати умову (3) для визначення індексу I_x. За формулою (4) визначити індекси j_i поточних координат за кожним координатним напрямком. Значення $x_n = (x^i(j_i) \mid i = \overline{1,m})$ є поточним наближенням до розв'язку задачі мінімізації випадкової функції.

Крок 4. Визначення поточних втрат. Поточні втрати ξ_n визначаються згідно із (6) як відстань до шуканого об'єкта.

Для статичного селективного методу додатково визначається поточне мінімальне значення втрат та поточне мінімальне наближення

$$\tilde{x}_n = \arg \min_{t=\overline{1,n}} \xi_t(x_t)$$

до шуканого об'єкта.

Крок 5. Визначення умови зупинки методу. Якщо $\xi_n = \|x_n - y_n\| = 0$ для динамічного селективного методу, то перейти на крок 8, інакше – на крок 6. Якщо $\xi_n = \|\tilde{x}_n - y_n\| = 0$ для статичного селективного методу, то перейти на крок 8, інакше – на крок 2.

Крок 6. Обчислення поточних значень параметрів алгоритму (тільки для динамічних селективних методів). Параметри алгоритму γ_n та ε_n обчислюються згідно з (11).

Крок 7. Визначення нових значень векторів змішаних стратегій (тільки для динамічних селективних методів). Перерахунок векторів змішаних стратегій здійснюється за рекурентним методом

$$p_{n+1} = \pi^I_{\varepsilon_{n+1}} \left\{ p_n - \gamma_n \xi_n \left[e(x_n) - p_n \right] \right\}.$$

Перейти на крок 2.

Крок 8. Виведення або запам'ятовування координат точки перехоплення об'єкта. Для динамічного селективного методу значення x^i_n, а для статичного селективного методу значення $\tilde{x}^i_n$, $i = \overline{1,m}$ є розв'язком пошукової задачі. Кінець.

<u>Алгоритм паралельного пошуку</u>

Крок 1. Ініціалізація алгоритму. Здійснюється так, як в алгоритмі послідовного пошуку.

Крок 2. Визначення поточної позиції об'єкта. Здійснюється так, як в алгоритмі послідовного пошуку.

Крок 3. Визначення координат поточного наближення до шуканого об'єкта. У циклі по $i = \overline{1,m}$ згенерувати випадкове число $\omega \in [0,1)$ за допомогою вбудованого генератора випадкових величин за рівномірним законом та використати умову (5) для визначення індексу j_i. Значення $x_n = (x^i(j_i) \mid i = \overline{1,m})$ є поточним наближенням до розв'язку задачі мінімізації випадкової функції.

Крок 4. Визначення поточних втрат. Поточні втрати гравців визначаються як відстань до шуканого об'єкта за відповідним координатним напрямком:

$$\xi^i_n = \left| x^i_n - y^i_n \right|.$$

Для статичного селективного методу згідно із (9) визначається поточне мінімальне значення втрат та поточне мінімальне наближення $\tilde{x}_n^i$ до об’єкта за кожним координатним напрямком.

Крок 5. Визначення поточної відстані до об’єкта та умови зупинки методу. Здійснюється так, як в алгоритмі послідовного пошуку.

Крок 6. Обчислення поточних значень параметрів алгоритму. Здійснюється так, як в алгоритмі послідовного пошуку.

Крок 7. Визначення нових значень векторів змішаних стратегій (тільки для динамічних селективних методів). Перерахунок векторів змішаних стратегій здійснюється згідно з (10), де $R(p_n^i, x_n^i, \xi_n^i) = \xi_n^i \left[e(x_n^i) - p_n^i \right]$. Перейти на крок 2.

Крок 8. Виведення або запам’ятовування координат точки перехоплення об’єкта. Для динамічного селективного методу значення x_n^i, а для статичного селективного методу значення $\tilde{x}_n^i$, $i = \overline{1, m}$ є розв’язком пошукової задачі. Кінець.

РЕЗУЛЬТАТИ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Виконаємо моделювання задачі випадкового пошуку об’єкта в m-вимірному просторі. За кожним виміром задається $N_i > 1$ дискретних значень координат. Загальна кількість спільних варіантів дорівнює $I = \prod_{i=1}^{m} N_i$. Позиція об’єкта задається випадковими координатами $y \in R^m$, розподіленими за нормальним законом $y \sim \text{Normal}(m_y, d_y)$. На переміщення об’єкта накладається обмеження $y \in X$. Значення математичного сподівання координат об’єкта $m_y = (m_y(j) \mid j = \overline{1, m}) = \text{const}$ отримано за допомогою генератора випадкових величин, розподілених за рівномірним законом $m_y(j) \sim \text{Random}(N_i) + 1$, $j = \overline{1, m}$. Так, при $m = 10$ та $N_i = 10$ маємо $m_y = (7,1,3,1,7,8,6,6,9,7)$. Для менших значень m математичне сподівання координат шуканого об’єкта визначається першими елементами вектора m_y. Для усіх експериментів, результати яких наведено у табл. 1–3, дисперсія розподілу дорівнює $d_y = 1$.

Для дослідження статичних неселективних алгоритмів приймемо, що $N_i = N = \text{const}$ для всіх $i = \overline{1, m}$. Тоді для забезпечення однакових умов роботи методів послідовного та паралельного пошуку розподіл їх варіантів задається імовірностями:

$$p(I_x) = \left(\frac{1 - p^i(j_i^*)}{N - 1} \right)^{m-k} \left(p^i(j_i^*) \right)^k, \text{ якщо } 0 < p^i(j_i^*) < 1;$$

$$p(I_x) = (N - 1)^{-m}, \quad \text{якщо } p^i(j_i^*) = 0;$$

$$p(I_x) = 1, \text{ якщо } p^i(j_i^*) = 1,$$

де $k = \sum_{i=1}^{m} \chi(j_i = j_i^*)$, $\chi(\cdot) \in \{0,1\}$ – індикаторна функція події.

Рівноімовірний вибір варіантів забезпечується значеннями імовірностей $p^i(j) = 1/N$, $j = \overline{1, N}$ для всіх $i = \overline{1, m}$. Тоді імовірність вибору спільних варіантів дорівнює $p(I_x) = N^{-m}$.

Для забезпечення достовірності комп’ютерного експерименту обчислення координат шуканого об’єкта, для яких виконується умова завершення пошукового методу, виконано за k=1000 реалізаціями пошукового алгоритму. Середні значення координат обчислюються так:

$$\overline{x}^i = k^{-1} \sum_{j=1}^{k} x^i(j), \; i = \overline{1, m}.$$

Ефективність пошукових методів визначається середньою кількістю ітерацій

$$\overline{n} = k^{-1} \sum_{j=1}^{k} n(j)$$

та середньою відстанню від пошукового процесу x_n до математичного сподівання позиції шуканого об’єкта y_n на момент завершення гри:

$$s = \left\| \overline{x}^i - m_y^i \right\|.$$

У табл. 1 наведені результати моделювання статичного неселективного методу пошуку об’єкта у двовимірному просторі $m = 2$ з $N = 10$ дискретними значеннями координат за кожним виміром. Жирним контуром позначено кращі результати роботи методу паралельного пошуку порівнянно з методом послідовного пошуку.

Таблиця 1

Ефективність неселективних пошукових методів із статичними розподілами варіантів

Імовірність локалізації мінімуму	Послідовний пошук		Паралельний пошук	
	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка
0	795	1,4	728	1,4
0,1	108	1	98	1
0,2	44	1	43	1
0,3	26	1	25	1
0,4	16	1	16	1
0,5	11	1	11	1
1	4	0	4	0

При $p^i(j_i^*) = 0$ досягнення мінімуму функції є можливим завдяки відмінній від нуля дисперсії координат шуканого об’єкта. Очевидно, що при нульовому значенні імовірності вибору та нульовій дисперсії метод не забезпечує визначення розв’язку (кількість пошукових кроків дорівнює безмежності).

При $p^i(j_i^*) = 1$ та нульовій дисперсії розв’язок отримується за один крок. Як видно з табл. 1, при відмінному від нуля значенні дисперсії для пошуку об’єкта необхідно декілька кроків.

Порівнюючи середню кількість кроків, необхідних для досягнення мінімуму функції, бачимо, що неселективні методи послідовного та паралельного пошуку мають приблизно однакову ефективність. Незначні переваги паралельного пошуку можна пояснити відмінністю емпіричного розподілу випадкових величин від теоретичного. При зростанні значення імовірності локалізації мінімуму функції ефективність послідовного та паралельного пошукових методів зростає, а відмінність між ними зменшується.

Результати моделювання статичного селективного методу наведені у табл. 2. Дані отримано для $m = 2$ вимірного пошукового простору з $N = 10$ значеннями дискретних координат за кожним виміром.

Таблиця 2

Ефективність селективних пошукових методів із статичними розподілами варіантів

Імовірність локалізації мінімуму	Послідовний пошук		Паралельний пошук	
	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка
0	81	1,4	42	1,4
0,1	27	1	12	1
0,2	14	1	8	1
0,3	10	1	7	1
0,4	8	1	6	1
0,5	6	1	5	1
1	3	0	3	0

Селективні статичні методи потребують меншої кількості кроків для досягнення мінімуму функції, ніж неселективні статичні методи. Паралельний селективний метод має кращу збіжність порівняно з послідовним селективним методом. Так, при $p^i(j_i^*) = 0.1$, що при $N = 10$ відповідає рівноімовірному вибору варіантів, паралельний метод знаходить мінімум поточної реалізації функції у середньому за вдвічі меншу кількість кроків. При зростанні $p^i(j_i^*)$ ефективність послідовного пошуку наближається до ефективності паралельного пошуку.

Результати моделювання адаптивних ігрових методів наведені у табл. 3. Дані отримано для значень параметрів $\alpha = 0.3$, $\beta = 2$, $\gamma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$, які відповідають збіжності ігрового методу у середньоквадратичному для знакододатних середовищ [6]. Досліджено вплив кількості гравців на ефективність методів послідовного та паралельного пошуку. У кожному експерименті гравці мають по $N = 10$ чистих стратегій.

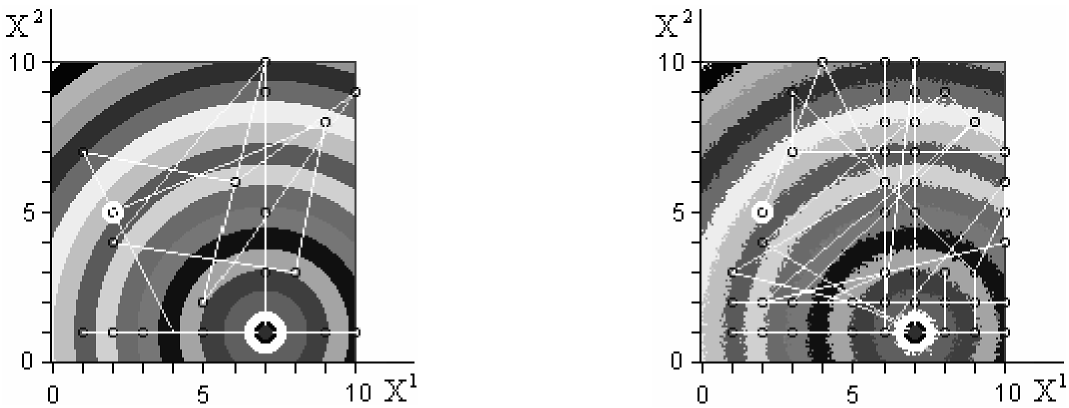
Ігровий адаптивний метод паралельного пошуку (гра m осіб), який належить до класу селективних динамічних методів, є кращим за швидкістю збіжності, ніж ігровий адаптивний метод послідовного пошуку (гра з природою). При $m = 5$ результати для гри з природою не отримано через велику кількість пошукових кроків. Метод гри m осіб дозволяє за допустимий час отримати результати пошуку у багатовимірному просторі для значень $m = \overline{1,10}$. При m=10 для пошуку об'єкта у просторі 10^{10} станів необхідно виконати близько 20 тисяч кроків.

Таблиця 3

Ефективність адаптивних ігрових пошукових методів

Кількість вимірів пошукового простору, m	Послідовний пошук (гра з природою)		Паралельний пошук (гра m осіб)	
	Середня кількість кроків	Середня похибка	Середня кількість кроків	Середня похибка
1	10	1	10	1
2	85	1	27	1
3	924	1,4	57	1,4
4	2241	1,4	96	1,4
5	–	–	194	1,7

Зрізи функції відстані до об'єкта та траєкторії зміни станів адаптивного ігрового методу паралельного пошуку зображено на рис. 1. При значенні дисперсії $d_y = 0$ змодельовано пошук статичного об'єкта, а при $d_y = 1$ – динамічного об'єкта з випадковим переміщенням на вибірці 10^4 випробувань. Незначна кількість ліній на рис. 1 демонструє збіжність та стійкість ігрового методу у часі за рахунок самонавчання векторів змішаних стратегій. Після досягнення точки оптимального розв'язку пошукові траєкторії не виходять з цієї точки при $d_y = 0$ та залишаються в її околиці при $d_y > 0$. Випадкові переміщення об'єкта (при $d_y = 1$) призводять до ускладнення його пошуку, що виявляється у зростанні кількості слідів переміщень порівняно із пошуком стаціонарного об'єкта (при $d_y = 0$).



$d_y = 0$ $\qquad$ $d_y = 1$

Рис. 1. Зрізи функції мети та траєкторії пошуку для гри двох осіб

Для визначеної цільової функції (6) ігрові методи забезпечують розв'язування пошукової задачі у чистих стратегіях. Графіки 1 на рис. 2 та 3 демонструють зміну евклідової норми векторів змішаних стратегій у часі. Значення норми прямує до 1 (на рисунках – до нуля десяткового логарифма), що свідчить про досягнення розв’язків ігрової задачі у чистих стратегіях.

На графіках 2 (рис. 2 та 3) зображено зміну функції середньої відстані (7) у часі для гри з природою (без розпаралелювання) та гри двох осіб (з розпаралелюванням пошуку). При $d_y = 0$ після 100 кроків для гри з природою та після 10 кроків для гри двох осіб середня відстань лінійно зменшується (у логарифмічному масштабі), що свідчить про потрапляння випадкового пошукового процесу у точковий стаціонарний об’єкт з нульовим відхиленням. При $d_y = 1$ середня відстань до об’єкта прямує до одиниці (до логарифмічного нуля), що відповідає значенню дисперсії переміщення об’єкта. Збіжність функції середньої відстані підтверджує висновки про стійкість адаптивних ігрових методів випадкового пошуку.

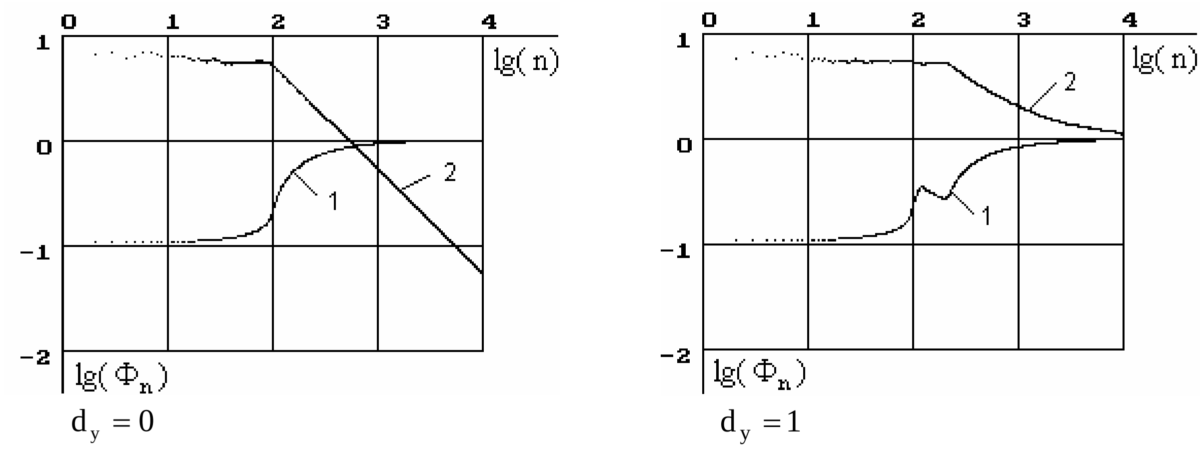


Рис. 2. Зміна норми вектора змішаних стратегій (1)
та функції середніх втрат (2) для гри з природою

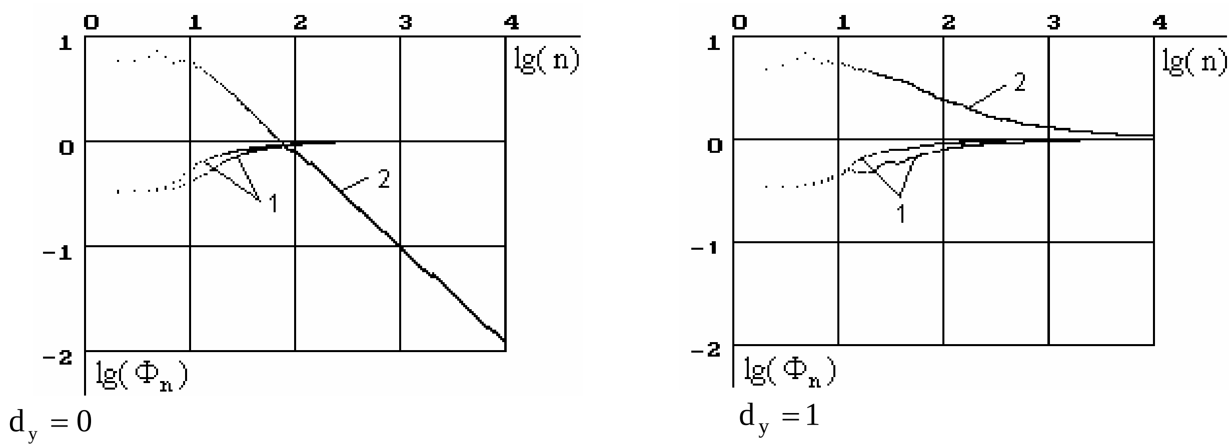


Рис. 3. Зміна норми вектора змішаних стратегій (1)
та функції середніх втрат (2) для гри двох осіб

Для відносного порівняння ефективності пошукових методів на рис. 3 наведено графіки залежності середньої кількості пошукових кроків від розмірності пошукового простору. Результати отримано для таких значень параметрів: $d_y = 1$; $r = 0$; $N_i = N = 10$, $i = \overline{1, m}$; $x_i(j) = j$, $j = \overline{1, N}$; $\alpha = 0.3$, $\beta = 2$, $\gamma_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 0.999N^{-1}$.

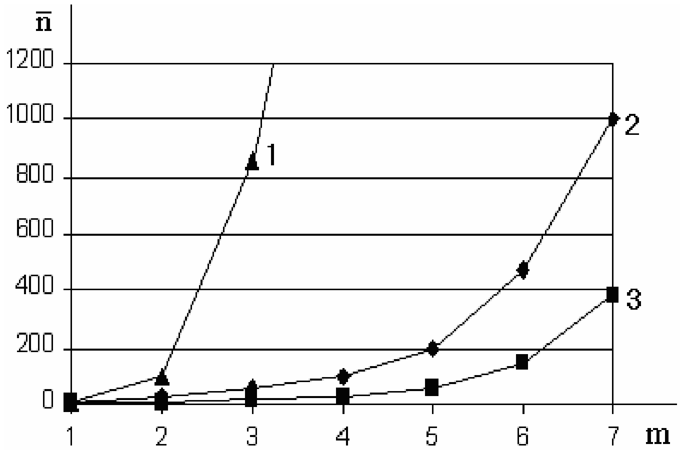


Рис. 3. Залежність середньої кількості пошукових кроків від розмірності пошукового простору N^m *для методів паралельного пошуку: 1 – неселективний RND–метод; 2 – ігровий адаптивний метод; 3 – селективний RND–метод*

З графіків видно, що при заданих значеннях параметрів селективні методи (2, 3) мають значну перевагу над неселективним методом рівноімовірного пошуку (1), що має показникове ($\sim N^m$) зростання середньої кількості кроків. Адаптивний ігровий метод (2) дещо поступається селективному методу рівноімовірного пошуку (3) за рахунок властивості самонавчання, яке на початковому проміжку часу моделювання може формувати неоптимальні стратегії. Як видно з рис. 3 у просторі 10^5 станів, цей метод забезпечує пошук мінімуму цільової функції (6) у середньому за 200 кроків. Для вирішення цієї ж задачі за допомогою методів паралельного рівноімовірного вибору станів необхідно ~10^5 кроків для неселективного та 70 кроків для селективного методів. Селективний ігровий метод забезпечує розв'язування сформульованої пошукової задачі у 500 разів, а селективний метод рівноімовірного пошуку – у 1500 разів скоріше, ніж неселективний метод рівноімовірного вибору станів.

З отриманих результатів видно, що ефективність ігрового адаптивного методу у 2–3 рази поступається ефективності селективного статичного методу. Це можна пояснити тим, що динамічні селективні методи, змінюючи значення імовірностей у процесі самонавчання, тимчасово можуть формувати неефективні стратегії пошуку. Однак, використовуючи навчені вектори змішаних стратегій, отримаємо оптимальний розв'язок задачі за декілька пошукових кроків.

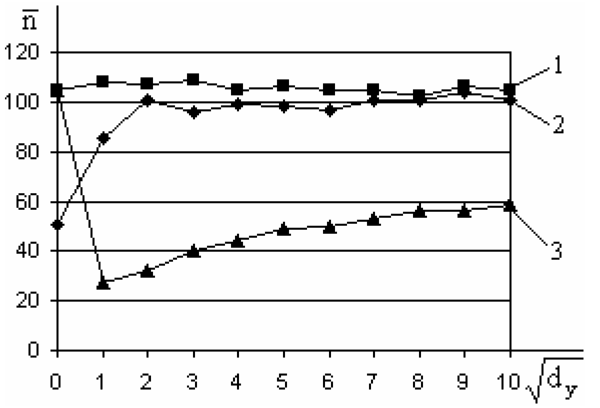
Залежність пошукових методів від дисперсії переміщення об'єкта зображено на рис. 4.

Аналіз отриманих результатів показує наступне:

1. Неселективний RND-метод послідовного (графік 1, рис. 4, *а*) та паралельного пошуку (графік 1, рис. 4, *б*) практично не залежить від дисперсії координат об'єкта.

2. При зростанні дисперсії переміщення об'єкта середня кількість пошукових кроків ігрового адаптивного методу послідовного (графік 2, рис. 4, *а*) та паралельного (графік 2, рис. 4, *б*) методів зростає. Для послідовного пошуку спостерігається стабілізація середньої кількості кроків після значення $\sqrt{d_y} \geq 2$, а для паралельного пошуку – після $\sqrt{d_y} \geq 7$.

3. При нульовій дисперсії ефективність неселективного та селективного RND–методу послідовного пошуку (графіки 1 та 3 на рис. 4, *а* при $d_y = 0$) є однаковою. При більшому від нуля значенні дисперсії селективний RND-метод послідовного пошуку переважає неселективний RND–метод у 2–5 разів. Зростання дисперсії призводить до зростання кількості пошукових кроків селективного RND–методу. Селективний метод паралельного пошуку (графік 3 рис. 4, *б*) практично не залежить від зміни дисперсії переміщення об'єкта. При усіх досліджених значеннях дисперсії цей метод переважає неселективний RND–метод (графік 2 рис. 4, *б*) та адаптивний ігровий метод паралельного пошуку (графік 1 рис. 4, *б*).



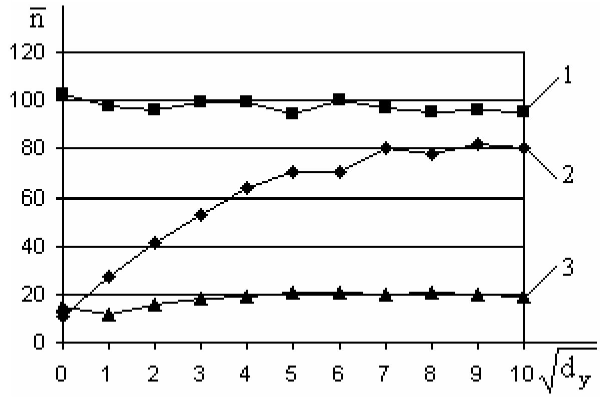


Рис. 4. Залежність середньої кількості пошукових кроків від дисперсії:
а – методи послідовного пошуку; б – методи паралельного пошуку.
Методи: 1 – неселективний RND–метод; 2 – ігровий адаптивний метод;
3 – селективний RND–метод

Неселективні RND–методи випадкового пошуку мають найнижчу обчислювальну складність. Селективні RND–методи є складнішими від неселективних методів за рахунок реалізації операцій відбору кращих поточних рішень. Обчислювальна складність ігрового методу є більшою від складності неселективного та селективного RND–методів, оскільки в ігровому методі на кожному кроці виконується проектування вектора змішаних стратегій на одиничний симплекс, реалізоване у вигляді ітераційної процедури.

Отримані у роботі результати відповідають найбільш несприятливій умові завершення пошуку, коли фронти двох випадкових процесів зустрічаються в одній точці пошукового простору. Кількість кроків пошуку можна значно скоротити послабленням умови зупинки роботи методу, наприклад, пошук припиняється, якщо відстань r між об'єктами стає меншою від деякого заданого значення. Однак, як показують результати імітаційного моделювання, основні співвідношення за ефективністю роботи розглянутих методів зберігаються.

ВИСНОВКИ

Для оптимізації систем в умовах невизначеності використовують методи випадкового пошуку, ефективність яких визначається кількістю пошукових кроків порівнянно із методом рівноімовірного вибору варіантів. Зменшення кількості пошукових кроків досягається запам'ятовуванням стратегій, що відповідають кращим поточним розв'язкам пошукової задачі, та розпаралелюванням випадкового пошуку. Такі властивості характерні для селективного та адаптивного ігрового методів випадкового пошуку.

Ефективне розпаралелювання задачі випадкового пошуку досягається при незалежному виборі пошукових варіантів множиною пошукових елементів та незалежному способі формування поточних втрат (вплив залежних втрат на швидкість збіжності пошукових методів вимагає додаткового дослідження). Порівняно з послідовним пошуком ефективність розпаралелювання селективного методу рівноімовірного вибору варіантів становить ~200 %, а ігрового адаптивного методу ~300 %.

З досліджених методів найефективнішим є селективний метод паралельного рівноімовірного вибору варіантів, який, залежно від розмірності пошукового простору, забезпечує розв'язування задачі за меншу у десятки – сотні разів кількість кроків, ніж неселективний метод рівноімовірного вибору варіантів. Ігрові адаптивні методи мають таку ж перевагу над методами неселективного пошуку, хоча й поступаються ефективності селективних методів рівноімовірного вибору у 2–3 рази за рахунок самонавчання векторів змішаних стратегій від початкового рівноімовірного до кінцевого селективного пошуку.

1. Растригин Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С. Адаптация случайного поиска. – Рига: Зинатне, 1973. – 242 с. 2. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов: Рекуррентные алгоритмы. – М.: Наука, 1986. 3. Кравець П.О. Оптимізація випадкового пошуку генетичним методом з розпаралелюванням // Інформаційні системи та мережі: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 464. – С. – 158–171. 4. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с. 5. Кравець П.О. Селективні методи випадкового пошуку // Матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. "Динаміка наукових досліджень". Т. 1. Сучасні комп'ютерні інформаційні технології. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2002. – С. 18–21. 6. Кравець П.О. Самонавчальні ігрові алгоритми на графових структурах // Матеріали Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики". – Львів, 1998. – С. 299–300. 7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Выща школа, 1988. – 549 с.