УДК 539.3

Ю.І. Ісаєв
НУ “Львівська політехніка”, кафедра будівельної механіки

ДО ПИТАННЯ ОЦІНОК КРИТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПІД ЧАС ДОСЛІДЖЕННЯ АВТОКОЛИВНОЇ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНОВ’ЯЗКИХ СИСТЕМ

Досліджується вплив характеристик матеріалу на стійкість і коливання консольного пружнов’язкого стрижня з масою на вільному кінці.

Розглядається задача про малі коливання і стійкість прямолінійної форми рівноваги пружнов’язкого консольного стрижня з резервуаром на вільному кінці при дії слідкуючого навантаження. Моделлю, яка описує спадкові властивості матеріалу стрижня, обирається така (стандартне тіло):

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E(\varepsilon + n\frac{H}{E}\dot{\varepsilon}) . \tag{1}$$

Тут n – час релаксації; H – миттєвий модуль пружності; E – довготривалий модуль пружності.

Стрижень завдовжки l з розподіленою масою m має резервуар масою M на вільному кінці. У центрі ваги резервуара на відстані d від кінця стрижня прикладені слідкуюча G і консервативна Q сили.

Положення стрижня при малих відхиленнях від прямолінійної форми рівноваги характеризується функцією $\vartheta(z,t)$.Необхідно визначити критичне значення навантаження, при якому відбувається втрата стійкості.

За відомими стандартами рівняння малих коливань для цього випадку має вигляд

$$EI\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4} + nHI\frac{\partial^5 \vartheta}{\partial z^4 \partial t} + P\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + nP\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial z^2 \partial t} + m\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + nm\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial t^3} = 0 \tag{2}$$

при граничних умовах

$$\vartheta(0,t) = \frac{\partial \vartheta(0,t)}{\partial z} = 0;$$

$$EI\frac{\partial^2 \vartheta(l,t)}{\partial z^2} + nHI\frac{\partial^3 \vartheta(l,t)}{\partial z^2 \partial t} = -EId\frac{\partial^3 \vartheta(l,t)}{\partial z^3} - M\rho^2\frac{\partial^3 \vartheta(l,t)}{\partial z \partial t^2}; \tag{3}$$

$$EI\frac{\partial^3 \vartheta(l,t)}{\partial z^3} + nHI\frac{\partial^4 \vartheta(l,t)}{\partial z^3 \partial t} = M\frac{\partial^2 \vartheta(l,t)}{\partial t^2} + Md\frac{\partial^3 \vartheta(l,t)}{\partial z \partial t^2} + Q\frac{\partial \vartheta(l,t)}{\partial z},$$

де EI – жорсткість стрижня; P=G+Q ; ρ – радіус інерції резервуара.

Використання підстановки $\vartheta(z,t) = f(z)e^{\lambda t}$ призводить до задачі на власні значення

$$f^{1v}(x) - \beta f''(x) - \delta f(x) = 0 \tag{4}$$

$$f(0)= f'(0) = 0; \quad gf'''(1) + f''(1) + vr\lambda^2 f'(1) = 0; \quad f'''(1) - uf'(1) - v\lambda^2 f(1)=0 \tag{5}$$

тут

$$\beta = -\frac{Pl^2}{EI}\frac{(1+n\lambda)}{1+n\frac{H}{E}\lambda}; \delta = -\frac{ml^4}{EI}\frac{\lambda^2}{(1+n\frac{H}{E}\lambda)}; x = \frac{z}{l}; h = \frac{d}{l};$$

$$r = \frac{\rho^2}{l^2}; \mu = \frac{Ml^3}{EI}; \eta = \frac{G}{G+Q}; g = \frac{h}{1+n\frac{H}{E}\lambda}; \nu = \frac{\mu}{1+n\frac{H}{E}\lambda}; \tag{6}$$

$$u = \nu h\lambda^2 - \frac{\beta(1-\eta)}{1+n\lambda};$$

У роботах [1, 2] розглядаються деякі наближені підходи до розв’язання такого типу задач. Зокрема, там використовуються бічні оцінки критичного параметра β^* флатера, який визначає перехід значень показника λ відповідного характеристичного рівняння задачі типу (4), (5) з лівої півплощини в праву. Наближеність підходів насамперед зумовлена тим, що функція, яка представляє ліву частину характеристичного рівняння для пружнов’язких систем, не є цілою. Тому подальше застосування критерію Гурвіца обмежене.

У статті пропонується відображення λ – площини в деяку w – площину, коли ліва частина площини λ переходить в одиничний круг. У такому разі втрата стійкості буде визначатися переходом коренів перетвореного характеристичного рівняння з внутрішності одиничного круга на зовнішність.

І.Шур у роботі [3] встановив правило, за яким необхідні і достатні умови розташування всіх коренів полінома

$$\chi(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{7}$$

в межах одиничного круга полягають у виконанні таких нерівностей:

$$\left|\frac{a_n}{a_0}\right| < 1, \cdots, \left|\frac{a_2^{(n-2)}}{a_0^{(n-2)}}\right| < 1, \quad \left|\frac{a_1^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}}\right| < 1, \tag{8}$$

де коефіцієнти $a_n^{(m)}$ є коефіцієнтами відповідних поліномів, які одержують з (7) завдяки певним перетворенням. Поряд з цим відомо, що при побудові границь області стійкості достатньо розглянути передостанню умову в (8), яка у випадку полінома третього порядку в (7) набуває вигляду

$$\frac{a_0 a_2 - a_1 a_3}{a_0^2 - a_3^2} = 1. \tag{9}$$

Запишемо характеристичне рівняння задачі (4), (5) подібно до [2]

$$F = F_0 + uF_2 + (\nu r\lambda^2 + gu)F_2' + \nu^2 r\lambda^4 F_4 + \nu\lambda^2 F_4' + \nu g\lambda^2 \Phi_2 = 0, \tag{10}$$

де нехтуючи розподіленою масою, одержимо

$$F_0 = 1; \quad F_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{(2m+2)!}; \quad F_2' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{(2m+1)!}; \quad F_4 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{(2m+4)!}; \tag{11}$$

$$F_4' = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)\beta^m}{(2m+3)!}; \quad \Phi_2 = m = 0\sum^{\infty} \left(C_{m+2}^2 - C_{m-2}^2\right)\frac{\beta^m}{(2m+2)!}.$$

Для переходу до w-площини застосовується перетворення

$$z = \frac{1+w}{a(1-w)}; \quad z = n\lambda; \quad a = \frac{H}{E}. \tag{12}$$

Одержуємо після розкладу в ряд за степенями w і при η=1

$$F = C_3 + C_2 w + C_1 w^2 + C_0 w^3 + \cdots, \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned} C_3 &= k_0 - k_1 B p + k_2 B^2 p^2 - k_3 B^3 p^3 + \cdots, \\ C_2 &= n_0 - n_1 p + n_2 p^2 - n_3 p^3 + \cdots, \\ C_1 &= m_0 - m_1 p + m_2 p^2 - m_3 p^3 + \cdots, \\ C_0 &= \ell_0 - \ell_1 p + \ell_2 p^2 - \ell_3 p^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{14}$$

тут $p = \frac{P l^2}{EI}$, а коефіцієнти k_i, n_i, m_i, ℓ_i – є певними функціями параметрів системи, C_i – знакозмінні добре збіжні ряди. Найменший корінь p^* критерію (9) і є наближеним значенням критичного параметра.

Для часткових випадків проведено розрахунок: для n=0,1;a=2;r=0,6;h=0,1---- одержано: при μ=1,μ=5,μ=10 наступні відповідні значення $p^* = 18{,}2;13{,}0;14{,}3$.

1. Ісаєв Ю.І. Стійкість пружнов'язкого консольного стержня з тілом на кінці // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1991. № 252. С.42–44. 2. Ісаєв Ю.І. Деякі підходи до дослідження автоколивної втрати стійкості пружнов'язких систем // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1994. № 278. С.36–38. 3. Schur I. Uber Potenzreihen die im Innern des Einheitkreises beshrankt sind // J.reine und angew. Math. 1918. Bd.148.