УДК 539.3:537.22

ВИХІДНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МАКРОСКОПІЧНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДЛЯ РУХОМИХ ТІЛ

© Михайло Семерак, Михайло Солодяк, Любомир Сопільник, Петро Столярчук, 2000

Львівський державний аграрний університет, кафедра фізики, 79060, Львів-Дубляни, Україна
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра "Метрологія, стандартизація та сертифікація", вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Запропоновано вираз для тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля, пондеромоторної сили та тепловиділень. Виходячи з коваріантності рівнянь Максвелла відносно перетворень Лоренца, описано закони перетворення характеристик електромагнітного поля, тензора натягів Максвелла, інтенсивності електромагнітного поля, а також тепловиділень та пондеромоторних сил. Наведено вихідні співвідношення електродинаміки, енергетичні та силові характеристики електромагнітного поля для рухомих тіл.

Предложено выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, пондеромоторной силы и тепловыделений. Исходя из ковариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца, описаны законы преобразования характеристик электромагнитного поля, тензора натяжений Максвелла, интенсивности электромагнитного поля, плотности импульса и энергии электромагнитного поля, а также тепловыделений и пондеромоторных сил. Приведены исходные соотношения электродинамики, энергетические и силовые характеристики электромагнитного поля для движущихся тел.

Basic equations of macroscopic electrodynamics of moving solids. Expressions for electromagnetic energy-impulse tensor, ponderomotive forces and thermal sources are proposed. Maxwell eguations covariance with respect to Lorents transformations is used to establish the laws of transformation of electromagnetic field parameter, Maxwell tension tensor,electromagnetic field intensity, densities of electromagnetic field impuls and energy as well as thermal sources and ponderomotive forces. Basic equations of electrodynamics of moving solids and correlations and force charakteristics of electromagnetic field are established.

Як відомо, в тілах, що рухаються в зовнішньому електромагнітному полі, індукуються електричні струми, які, у свою чергу, породжують вторинне електромагнітне поле. Внаслідок цього в тілі виникає джоулеве тепло, а також на нього діє пондеромоторна сила (сила Ампера). Ці характеристики, а також інтенсивність та густина енергії електромагнітного поля є важливими для вивчення впливу електромагнітного поля на фактори неелектромагнітного походження (механічні, теплові, хімічні, біологічні тощо).

У літературі [1-5], ґрунтуючись на ейнштейнівській теорії відносності, є достатньо добре розроблена мікроскопічна електродинаміка рухомих тіл. Недостатньо добре є висвітлені питання енергетичних та силових характеристик електромагнітного поля, про які йшлося вище. Існують багато суперечностей щодо цієї проблеми.

У роботі зроблено спробу вирішити дані питання.

Розглянемо дві координатні системи відліку К і К`. Система К` рухається відносно системи К зі сталою швидкістю $\vec{v}$, що має довільно вибраний напрям. Просторово-часові точки в цих системах позначимо відповідно $\left(\vec{r},t\right)$ і $\left(\vec{r}',t'\right)$. У механіці суцільного середовища власну систему відліку К` пов`язують з іменем Лагранжа, а лабораторну К – з іменем Ейлера.

Кожній точці чотиривимірного просторово-часового континууму поставимо у відповідність чотиривимірний радіус-вектор, який для введених систем відліку буде [1,4]

$$x_j \equiv \left(\vec{r}, i_o c t\right), \quad x'_j \equiv \left(\vec{r}', i_o c t\right), \quad j' = \overline{1,4},$$

де c – швидкість поширення світла у вакуумі, i_o – уявна одиниця.

Тут і надалі всі індекси, позначені латинськими буквами, набувають значень від 1 до 4 $\left(i, j = \overline{1,4}\right)$, а грецькими – від 1 до 3 $\left(\alpha, \beta = \overline{1,3}\right)$.

Зв`язок між величинами x_j і x_j' задаємо перетворенням Лоренца, яке можна записати в загальному вигляді [ ]

$$x_i' = \Lambda_{ij} x_j, \quad i, j = \overline{1,4}. \tag{1}$$

Тут $\Lambda_{ij} = \partial_j x_i'$, $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} = \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ – чотиривимірний аналог оператора Гамільтона; Λ_{ij} – компоненти матриці перетворення $\hat{\Lambda}$, яку називають матрицею Лоренца і яка для співвідношень (1) має [1,6,7]

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 + kv_1^2 & kv_1 v_2 & kv_1 v_3 & \frac{i\gamma}{c} v_1 \\ kv_1 v_2 & 1 + kv_1^2 & kv_2 v_3 & \frac{i\gamma}{c} v_2 \\ kv_1 v_3 & kv_2 v_3 & 1 + kv_1^2 & \frac{i\gamma}{c} v_3 \\ -\frac{i\gamma}{c} v_1 & -\frac{i\gamma}{c} v_2 & -\frac{i\gamma}{c} v_3 & \gamma \end{vmatrix}, \tag{2}$$

де $k = (\gamma - 1)/v^2$; $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$; $v = |\vec{v}|$. Зауважимо, що визначник матриці (2) дорівнює одиниці.

Зі співвідношення (1), використовуючи конкретний вигляд матриці (2), отримаємо такі перетворення координати $\vec{r}_i$ і часу t [1,6]

$$\vec{r}' = \vec{r} + k(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} - \gamma \vec{v} t, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2}\right). \tag{3}$$

Тут і надалі крапкою між величинами позначено їх скалярний добуток.

Використовуючи співвідношення (3), запишемо закони перетворення операторів диференціювання за координатами і за часом:

$$\vec{\nabla}' = \vec{\nabla} + k\vec{v}\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) + \gamma \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \tag{4}$$

Для опису електромагнітного поля в середовищі запишемо основні формули релятивістської електродинаміки [1,3]. Введемо до розгляду 4-вектор густини струму $I_m \equiv \left(\vec{j}, icq\right)$, утворений вектором густини повного електричного струму $\vec{j}$ та об`ємною густиною електричного заряду q. Запишемо рівняння Максвелла в коваріантній формі [1,5]

$$\partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} = 0, \quad \partial_j H_{ij} = I_i, \tag{5}$$

де F_{ij} і H_{ij} – два антисиметричні тензори другого рангу:

$$\hat{F} = \begin{vmatrix} 0 & icB_3 & -icB_2 & E_1 \\ -icB_3 & 0 & icB1 & E_2 \\ icB_2 & -icB_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -icD_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -icD_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -icD_3 \\ icD_1 & icD_2 & icD_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

тензори електромагнітного поля та індукції відповідно; E_α, H_α та D_α, B_α – компоненти векторів напруженостей та індукцій відповідно електричного та магнітного полів.

Щоб отримати формули перетворення 4-вектора густини струму та векторів електромагнітного поля при переході до рухомої системи відліку, застосуємо закони перетворення компонент довільних тензорів першого та другого рангів:

$$J_i' = \Lambda_{in} j_n, \quad G_{ij}' = \Lambda_{im}\Lambda_{in} G_{mn}, \tag{7}$$

де $\hat{G} = \left\{\hat{F}, \hat{H}\right\}$.

Використовуючи конкретний вигляд матриці перетворення (2), зі співвідношень (7) отримаємо такі закони перетворення полів:

$$\begin{aligned} \vec{H}' &= \gamma\left(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{G}\right) - k\left(\vec{v} \cdot \vec{H}\right)\vec{v}, \\ \vec{E}' &= \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) - k\left(\vec{v} \cdot \vec{E}\right)\vec{v}, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}\right) - k\left(\vec{v} \cdot \vec{B}\right)\vec{v}, \\ \vec{D}' &= \gamma\left(\vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{H}\right) - k\left(\vec{v} \cdot \vec{D}\right)\vec{v}, \end{aligned} \tag{8}$$

і густин електричного струму та заряду відповідно

$$\vec{j}' = \vec{j} + k\left(\vec{j} \cdot \vec{v}\right)\vec{v} - \gamma q\vec{v}, \quad q' = \gamma\left(q - \frac{\vec{j} \cdot \vec{v}}{c^2}\right). \tag{9}$$

Символом “x” позначено векторний добуток векторів.

Дія електромагнітного поля на тіло характеризується густиною пондеромоторної сили $\vec{F}$ та теплом Q, які, у свою чергу, виражаються через компоненти тензора енергії-імпульсу $\hat{T}$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \hat{P} - \vec{G}, \quad -Q \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \dot{W} \tag{10}$$

Тензор енергії-імпульсу введемо так [7]:

$$\hat{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{P}} & -\mathrm{i}_0 c \dot{\vec{\mathrm{D}}} \\ \frac{1}{\mathrm{i}_0 c}\vec{\Pi} & \mathrm{W} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

компонентам якого надамо таку фізичну інтерпретацію:

$$\hat{P} = \vec{H} \otimes \vec{B} + \vec{E} \otimes \vec{D} - W\,\hat{I} \tag{12}$$

– тензор натягів Максвелла;

$$\vec{G} = \vec{D} \times \vec{B} \tag{13}$$

– густина імпульсу електромагнітного поля;

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{14}$$

– густина вектора потоку електромагнітної енергії (вектор Пойнтінга);

W – густина енергії електромагнітного поля, яка визначається із рівняння

$$\dot{W} = \vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D} \tag{15}$$

У формулі (12) символом «$\otimes$» позначено діодний добуток $\hat{T}$ – одиничний тензор, а у формулах (10) і (15) (а також і надалі) крапка над величиною означає частинну похідну за часом.

Підставляючи означення (12)-(15) для компонент тензора енергії-імпульсу у співвідношення (10), а також беручи до уваги рівняння Максвелла (5), отримаємо такі формули для пондеромоторної сили та тепла через характеристики електромагнітного поля:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{H} + \left(\vec{D} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E} + \\ &+ \vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) + \vec{D} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) - \vec{\nabla} W \end{aligned}, \tag{16}$$

$$Q = \vec{j} \cdot \vec{E}\,. \tag{17}$$

Запишемо закони перетворення компонент тензора енергії-імпульсу (11) при переході від нерухомої К до рухомої систем відліку:

$$\begin{aligned} P'_{\alpha\alpha} &= P_{\alpha\alpha} + kV_\alpha V_{\alpha_1}\left(P_{\alpha\alpha_1} + P_{\alpha_1\alpha}\right) + k^2 V_\alpha^2 \vartheta + \\ &+ \gamma V_\alpha\left[G_\alpha + \Pi_\alpha / c^2 + kv_\alpha\left(\vec{V} \cdot \vec{G} + \vec{V} \cdot \vec{\Pi} / c^2\right)\right] - \\ &- \left(\frac{\gamma V_\alpha}{c}\right)^2 W, \\ P'_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta} + k\left[\left(V_\alpha^2 + V_\beta^2\right)P_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta\left(P_{\alpha\alpha} + P_{\beta\beta}\right) + \right. \\ &+ \left. V_\gamma\left(V_\beta P_{\alpha\gamma} + V_\alpha P_{\gamma\beta}\right)\right] k^2 V_\alpha V_\beta \vartheta + \\ &+ \gamma V_\beta\left(G_\alpha + kv_\alpha \vec{V} \cdot \vec{G}\right) + \frac{\gamma V_\alpha}{c^2}\left(\Pi_\beta + kV_\beta \vec{V} \cdot \vec{\Pi}\right) - \\ &- \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 V_\alpha V_\beta W, \end{aligned}$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\begin{aligned} \vec{G}' &= \gamma\left[\vec{G} + k\left(\vec{V} \cdot \vec{G}\right)\vec{V} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{V} \cdot \hat{\sigma} + k\vartheta\vec{V}\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma\vec{V}}{c^2}\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{\Pi}}{c} - W\right)\right]; \\ \vec{\Pi}' &= \gamma\left[\vec{\Pi} + k\vec{V}\left(\vec{V}\,\vec{\Pi} + \vartheta\right) + \gamma\vec{V}\left(\cdot\vec{V}\vec{G} - W\right) + \hat{\sigma} \cdot \vec{V}\right], \\ W' &= \gamma^2\left[W - \vec{V} \cdot \vec{G} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{V} \cdot \vec{\Pi} + \vartheta\right)\right] \end{aligned} \tag{18}$$

де $V \equiv v_{\alpha_1} v_{\beta_1} P_{\alpha_1\beta_1}$; за індексами α_1 і β_1 виконується підсумовування.

Враховуючи формули (17) і (18), запишемо закони перетворення для компонент 4-вектора сили:

$$\vec{F}' = \vec{F} + k\left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right)\vec{v} - \frac{\gamma}{c^2} Q\,\vec{v}, \quad Q' = \gamma\left(Q - \vec{F} \cdot \vec{v}\right). \tag{19}$$

Отже, в загальному випадку виписано основні співвідношення релятивістської макроскопічної електродинаміки.

Для практичних застосувань цієї теорії обмежимося малими швидкостями порівняно зі швидкістю світла, тобто v/c<<1. Інакше кажучи, нехтуватимемо ефектами, пропорційними до квадрата та вищими ступенями відношення v/c (галілеєво інваріантний випадок).

Випишемо найважливіші формули, розглянуті в цій роботі для даного наближення. Вони отримані із основних формул як граничний випадок при прямуванні швидкості поширення світла до нескінченності, тобто при $c \to \infty$, чи $\gamma=1$, $k=0$.

Рівняння електродинаміки (5):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \dot{\vec{D}} + \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = q. \end{aligned} \tag{20}$$

Перетворення координат (3) та операторів (4):

$$\begin{aligned} &\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t, \quad \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}, \\ &\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \equiv \frac{d}{dt} \end{aligned} . \tag{21}$$

Закони перетворення векторів електромагнітного поля (8) і (9):

$$\begin{aligned} \vec{H}^1 &= \vec{H} - \vec{V} \times \vec{D}, \quad \vec{B}^1 = \vec{B}; \\ \vec{E}^1 &= \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \quad \vec{D}^1 = \vec{D}; \\ \vec{j}^1 &= \vec{j} - g\vec{V}, \quad g^1 = g. \end{aligned} \tag{22}$$

Перетворення компонент тензора енергії-імпульсу (19):

$$\hat{P}^1 = \hat{P} + \vec{V} \otimes \vec{G}, \quad \vec{G}^1 = \vec{G},$$

$$\vec{\Pi}^1 = \vec{\Pi} + \left(\vec{V} \cdot \vec{G} - W\right)\vec{V} + \hat{P} \cdot \vec{V}, \quad W^1 = W - \vec{V} \cdot \vec{G} \quad (23)$$

Закони перетворення для компонент сили (19):

$$\vec{F}^1 = \vec{F}, \quad \vec{Q} = Q - \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (24)$$

Система рівнянь (20)-(24) повинна бути доповнена матеріальними співвідношеннями електродинаміки, тобто зв'язками $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ і $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$, а також законом Ома, який пов'язує густину струму провідності $\vec{I} = \vec{j} - g\vec{V}$ з напруженістю електричного поля $\vec{E}$.

Обмежимося розглядом тіл, які здатні лінійно намагнічуватися та поляризуватися. Тоді залежності між індукціями та напруженостями як магнітного, так і електричного полів в рухомій системі відліку K^1 можна записати у вигляді

$$\vec{B}^1 = \mu\mu_o \vec{H}^1, \quad \vec{D}^1 = \varepsilon\varepsilon_o \vec{E}^1, \quad (25)$$

а закон Ома для електропровідних тіл приймемо також лінійним

$$I^1 = \partial \vec{E}^1, \quad (26)$$

де ε_o і μ_o – електрична та магнітна сталі; ε і μ – відносні електрична та магнітна проникності середовища; λ – коефіцієнт електропровідності. Для неелектропровідних тіл будемо вважати $\lambda = 0$ $\left(\vec{I} = 0\right)$.

Із врахуванням формул (22), співвідношення (25)-(26) у лабораторній (нерухомій) системі відліку К запишемо так:

$$\vec{B} = \mu\mu_o \vec{H}, \ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_o \vec{E}, \vec{j} = g\vec{V} + \lambda\left(\vec{E} = \mu\mu_o \vec{V} \times \vec{H}\right), \quad (27)$$

Співвідношення (27) дозволяють записати робочу систему рівнянь макроскопічної електродинаміки для рухомих тіл.

Рівняння електродинаміки:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_o \dot{\vec{E}} + \lambda\left(\vec{E} + \mu\mu_o \vec{V} \times \vec{H}\right) + g\vec{V}, \ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\mu\mu_o \dot{\vec{H}}, \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = g\left(\varepsilon\varepsilon_o\right) \quad (28)$$

Компоненти тензора енергії-імпульсу:

$$\hat{P} = \mu\mu_o\left(\vec{H} \otimes \vec{H} - \frac{1}{2}\vec{H}^2\hat{I}\right) + \varepsilon\varepsilon_o\left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2\hat{I}\right),$$

$$\vec{G} = 0, \ W = \frac{1}{2}\left(\mu\mu_o \vec{H}^2 + \varepsilon\varepsilon_o \vec{E}^2\right),$$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{E} \times \vec{H} + \mu\mu_o\left[\left(\vec{V} \cdot \vec{H}\right)\vec{H} - \left(\vec{H}^2\right)\vec{V}\right] + \\ &+ \varepsilon\varepsilon_o\left[\left(\vec{V} \cdot \vec{E}\right)\vec{E} - \left(\vec{E}^2\right)\vec{V}\right] \end{aligned} \quad (29)$$

Вирази для пондеромоторної сили та джоулевого тепла:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= g\left(\vec{E} + \mu\mu_o \vec{V} \times \vec{H}\right) + \\ &+ \lambda\mu\mu_o\left\{\vec{E} \times \vec{H} + \mu\mu_o\left[\left(\vec{V} \cdot \vec{H}\right)\vec{H} - \left(\vec{H}^2\right)\vec{V}\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$Q = \lambda\left\{\vec{E} - 2\mu\mu_o \vec{V} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) + \left(\mu\mu_o\right)^2\left[\vec{H}^2 \cdot \vec{V}^2 - \left(\vec{V} \cdot \vec{H}\right)^2\right]\right\} \quad (30)$$

Співвідношення (28)-(30) можна використати при конкретних розрахунках для знаходження характеристик електромагнітного поля, інтенсивності та густини його енергії, пондеромоторної сили та тепловиділень у рухомих тілах, які перебувають під впливом зовнішнього магнітного поля.

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика.М., 1965. 2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля.М. 1973. 3. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М, 1963. 4. Терлецкий Я. П. Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М., 1990. 5. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология.М., 1974. 6. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике.М., 1970. 7. Солодяк М. Т. Математична модель магнітотермопружності феромагнітних тіл // Фіз..-хім. механіка матеріалів. 2000. №1.С.7-16.