Запропонована бібліотека реально використана при побудові синтаксичного аналізатора в системі автоматизованого розпаралелювання та виконання однопотокових послідовних програм [4].

1. ANSI C: ANSI Technical Committee X3J11, 1988. 2. Clipper Summer'87 Programmer's Guide. 3. Грунд Ф. Программирование на языке ФОРТРАН IV, М., 1974. 4. Почаєвець О., Система автоматизованого розпаралелювання та виконання однопотокових послідовних програм / Вісн. ДУ "Львівська політехніка".

УДК 62.519

Рицар Б.Є.
ДУ "Львівська політехніка", кафедра РТП

ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЙНІ КЛОНИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Розглядається теоретико-множинний критерій декомпоновності булевих функцій *n* змінних, що ґрунтується на запропонованому понятті так званого декомпозиційного клона. Показано, як шляхом простих процедур розв'язується проблема доозначення часткових булевих функцій. Формулюється теорема про роздільну декомпозицію булевих функцій *n* змінних.

Декомпозиція, як процес вираження логікової функції *n* змінних за допомогою функцій меншої кількості змінних, є фундаментальною проблемою логікового синтезу [1,2]. Зокрема, булева функція $Y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вважається декомпоновною, якщо її можна виразити одним з трьох видів:

$$Y = \varphi(\varphi_1(X^{n-q}), X^q)\,; \tag{1}$$

$$Y = \varphi(X^{n-q}, \varphi_1(X^q))\,; \tag{2}$$

$$Y = \varphi(\varphi_1(X^{n-q}), \varphi_2(X^q)) \tag{3}$$

де X^{n-q}, X^q – власні підмножини множини змінних $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, утворені процедурою q-розбиття мінтермів [3,4], причому, у разі роздільної декомпозиції $X^{n-q} \cap X^q = \varnothing$; $q \in \{1,2,...,(n-1)\}$; φ_1, φ_2 і φ – відповідно, зв'язані і залишкова булеві функції меншої кількості змінних, ніж задана функція Y.

Класичним критерієм декомпоновності булевої функції Y, тобто здатності бути розділеною до виду одноблокової (1,2) чи двоблокової (3) декомпозиції, є не більше двох різних рядків чи/і стовців декомпозиційної карти чи карти Карно [1,5] або таблиці істинності [6] чи булевої матриці [7].

У даній статті пропонується новий критерій функційної декомпоновності, що ґрунтується на процедурі q-розбиття мінтермів функції Y, заданої теоретико-множинною формою (ТМФ) [4]. Зокрема, повна ($p = 0$) або часткова (недоозначена чи слабоокреслена)

($p = 2^n - r$) булеві функції зображаються у ТМФ так:

$$Y = \begin{cases} Y^1 = \{m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, ..., m_{\lambda_r}\}^1 \\ Y^0 = \{m_{\lambda_{r+1}}, m_{\lambda_{r+2}}, ..., m_{\lambda_{2^n-r-p}}\}^0 \end{cases}, \tag{4}$$

де m_{λ_i} – *i*-ий двійковий мінтерм функції Y.

У результаті процедури q-розбиття мінтермів дана ТМФ (4) перетворюється у досконалу теоретико-множинну декомпозиційну форму (ТМДФ):

$$Y \overset{P^q}{\Rightarrow} \begin{cases} \{m_1^{n-q} \mid m_1^q, m_2^{n-q} \mid m_2^q, ..., m_r^{n-q} \mid m_r^q\}^1 \\ \{m_{r+1}^{n-q} \mid m_{r+1}^q, m_{r+2}^{n-q} \mid m_{r+2}^q, ..., m_{2^n-r-p}^{n-q} \mid m_{2^n-r-p}^q\}^0 \end{cases}. \tag{5}$$

де $\overset{P^q}{\Rightarrow}$ – оператор q-розбиття мінтермів (4); m_i^{n-q}, m_i^q – субмінтерми *i*-го розбитого мінтерма $m_i^{n-q} \mid m_i^q$, відповідно $(n-q)$ - і q-класів розбиття.

Табличним зображенням досконалої ТМДФ (5) може бути карта q-розбиття розмірності $2^{n-q} \times 2^q$ [4], прототипом якої є декомпозиційна карта *Curtis*'а [2]. Кожним елементом такої карти є розбитий мінтерм (5), субмінтерми якого відповідають значенням її координат. На відміну від карти *Curtis*'а, карту q-розбиття можна спростити, тобто максимально зменшити її розмірність до скороченої карти [4]. Для цього досить виконати операції об'єднання однакових координат карти q-розбиття, наприклад, спочатку однакових рядків, а потім однакових стовпців. Об'єднаним координатам карти відповідає множина (об'єднаних) субмінтермів того чи іншого класу розбиття. Отже, скороченій карті q-розбиття відповідає скорочена ТМДФ певного q-розбиття.

Утворена скорочена ТМДФ являє собою множину неперетних розбитих мінтермів (5), бо попарно взаємні перетини їх множин субмінтермів одного класу розбиття будуть порожніми. Якщо розмірність скороченої карти q-розбиття становить 2×2^q або $2^{n-q} \times 2$, то заданій функції властива одноблокова (проста) декомпозиція (1) або (2), а якщо ж скорочена карта має розмірність 2×2, то даній функції властива двоблокова декомпозиція (3). Відповідно, скорочена ТМДФ певного q-розбиття у разі (1) або (2) матиме не більше 2 різних множин субмінтермів $(n-q)$– або q-класу, а у разі (3) – не більше 2 різних множин субмінтермів обох класів. Ця обставина є умовою декомпоновності булевої функції. Тобто, щоб зробити висновок про декомпоновність функції Y, необхідно підрахувати кількість різних множин субмінтермів в обох класах розбиття.

Означення 1. Декомпозиційний клон – це будь-яка множина однакових підфункцій булевої функції *n* змінних.

Означення 2. Максимальний декомпозиційний клон – це множина всіх однакових підфункцій булевої функції *n* змінних.

Декомпозиційний клон утворюється об'єднанням нефіксованих субмінтермів розбитих мінтермів досконалої ТМДФ, які мають однакові (фіксовані) субмінтерми. Отже, декомпозиційний клон – це рядок чи стовпець довільної карти q-розбиття. Натомість максимальний декомпозиційний клон – це множина всіх однакових рядків чи стовпців карти q-розбиття, тобто – це рядок чи стовпець скороченої карти q-розбиття функції Y.

Декомпозиційні клони зображатимемо в круглих дужках, де множина чи множини субмінтермів $(n-q)$-класу N^{n-q} розташовані зліва риски "|", а множина чи множини субмінтермів q-класу N^q – справа риски "|". Оскільки одна з множин субмінтермів є спільною (фіксованою) для значень Y^1 і Y^0, а інші містять субмінтерми окремо для Y^1 і Y^0, то можна окреслити, відповідно:

- *декомпозиційні клони* $(n-q)$*-класу*, якщо фіксованою є множина субмінтермів $(n-q)$-класу розбиття;
- *декомпозиційні клони q-класу*, якщо фіксованою є множина субмінтермів q-класу розбиття.

Декомпозиційні клони називатимемо *повними*, якщо їх твірні підфункції повні, і відповідно, – *неповними*, якщо їх твірні підфункції неповні.

На рис.1 показано повну множину (4 типи) декомпозиційних клонів $(n-q)$-класу (*а*, *б*, *в*, *г*) і *q*-класу (*а*′, *б*′, *в*′, *г*′), де N_1^{n-q}, N_2^{n-q} і N_1^q, N_2^q – множини нефіксованих субмінтермів, відповідно, $(n-q)$- і q-класу розбиття (причому, множини, що належать до Y^1 розташовуються на верхньому ярусі, а множини, що належать до Y^0 – на нижньому ярусі декомпозиційного клона); N^{n-q} і N^q – множини фіксованих субмінтермів, відповідно, $(n-q)$- і q-класу розбиття, де $N^{n-q} \subseteq \mathbf{E}_2^{n-q}$ і $N^q \subseteq \mathbf{E}_2^q$; $N_1^{n-q} \cup N_2^{n-q} \subseteq \mathbf{E}_2^{n-q}$ і $N_1^q \cup N_2^q \subseteq \mathbf{E}_2^q$, причому $N_1^{n-q} \cap N_2^{n-q} = \varnothing$ і $N_1^q \cap N_2^q = \varnothing$. Очевидно, що повним декомпозиційним клонам $(n-q)$- і q-класу відповідають рівності $N_1^q \cup N_2^q = \mathbf{E}_2^q$ і, а неповним – $N_1^q \cup N_2^q \subset \mathbf{E}_2^q$ і $N_1^{n-q} \cup N_2^{n-q} \subset \mathbf{E}_2^{n-q}$.

а) $\begin{array}{c|cc} & N_1^q & N_2^q \\ \hline N^{n-q} & \bullet & \bullet \end{array}$ $\left(N^{n-q} \middle| \begin{array}{l} N_1^q, N_2^q \\ \varnothing \end{array}\right)$ *а*′) $\begin{array}{c|c} & N^q \\ \hline N_1^{n-q} & \bullet \\ N_2^{n-q} & \bullet \end{array}$ $\left(\begin{array}{l} N_1^{n-q}, N_2^{n-q} \\ \varnothing \end{array} \middle| N^q\right)$

б) $\begin{array}{c|cc} & N_1^q & N_2^q \\ \hline N^{n-q} & \mathrm{o} & \bullet \end{array}$ $\left(N^{n-q} \middle| \begin{array}{l} N_2^q \\ N_1^q \end{array}\right)$ *б*′) $\begin{array}{c|c} & N^q \\ \hline N_1^{n-q} & \mathrm{o} \\ N_2^{n-q} & \bullet \end{array}$ $\left(\begin{array}{l} N_2^{n-q} \\ N_1^{n-q} \end{array} \middle| N^q\right)$

в) $\begin{array}{c|cc} & N_1^q & N_2^q \\ \hline N^{n-q} & \bullet & \mathrm{o} \end{array}$ $\left(N^{n-q} \middle| \begin{array}{l} N_1^q \\ N_2^q \end{array}\right)$ *в*′) $\begin{array}{c|c} & N^q \\ \hline N_1^{n-q} & \bullet \\ N_2^{n-q} & \mathrm{o} \end{array}$ $\left(\begin{array}{l} N_1^{n-q} \\ N_2^{n-q} \end{array} \middle| N^q\right)$

г) $\begin{array}{c|cc} & N_1^q & N_2^q \\ \hline N^{n-q} & \mathrm{o} & \mathrm{o} \end{array}$ $\left(N^{n-q} \middle| \begin{array}{l} \varnothing \\ N_1^q, N_2^q \end{array}\right)$ *г*′) $\begin{array}{c|c} & N^q \\ \hline N_1^{n-q} & \mathrm{o} \\ N_2^{n-q} & \mathrm{o} \end{array}$ $\left(\begin{array}{l} \varnothing \\ N_1^{n-q}, N_2^{n-q} \end{array} \middle| N^q\right)$ (6)

Рис.1. Декомпозиційні клони $(n-q)$-класу (*а*, *б*, *в*, *г*) і q-класу (*а*′, *б*′, *в*′, *г*′)

Наприклад, $\left(0 \middle| \begin{array}{l} 0,2 \\ 1,3 \end{array}\right)$ і $\left(\begin{array}{l} 1 \\ 0,2,3 \end{array} \middle| 1,3\right)$ – декомпозиційні клони, відповідно, $(n-q)$- і q-класу, типи яких *б*) чи *б*′) або *в*) чи *в*′) залежать від досконалих ТМДФ, з яких вони утворені.

Натомість, $\left(\begin{matrix} 2,5,6 \\ 0,4 \end{matrix}\middle| 3\right)$ – неповний декомпозиційний клон q-класу, бо $\{2,5,6\}^1 \cap \{0,4\}^0 = \varnothing$, але $\{2,5,6\}^1 \cup \{0,4\}^0 = \{0,2,4,5,6\} \neq \mathbf{E}_2^3$.

Декомпозиційні клони одного класу називатимемо *однаковими*, якщо вони мають рівні множини нефіксованих субмінтермів, як наприклад, $\left(2\middle|\begin{matrix} 2,3 \\ 0,1 \end{matrix}\right)$ і $\left(6\middle|\begin{matrix} 2,3 \\ 0,1 \end{matrix}\right)$.

Декомпозиційні клони одного класу вважатимемо *неперетними*, якщо перетин їх множин фіксованих субмінтермів порожній. Наприклад, $\left(0,1\middle|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$ і $\left(3,5\middle|\begin{matrix} 2,3 \\ \varnothing \end{matrix}\right)$ – неперетні, на відміну від перетних $\left(\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}\middle| 0,3,4,6\right)$ і $\left(\begin{matrix} 1 \\ 0,2 \end{matrix}\middle| 1,3,4\right)$.

Два неперетні декомпозиційні клони називатимемо *комплементарними*, якщо об'єднання множин їх одноіменних нефіксованих субмінтермів рівні. Зокрема, $\left(\begin{matrix} 0,2,4,6 \\ 1,7 \end{matrix}\middle| 0\right)$ і $\left(\begin{matrix} 1,7 \\ 0,2,4,6 \end{matrix}\middle| 3\right)$ – комплементарні клони, бо $\{(0,2,4,6) \cup (1,7)\}^1 = \{(1,7) \cup (0,2,4,6)\}^0 =$ $= \{0,1,2,4,6,7\} = \mathbf{E}_2^3$. Комплементарні клони одержуються з однотипних пар (6) за умови $N^{n-q} = N_{1(2)}^{n-q} = \mathbf{E}_2^{n-q} \setminus N_{2(1)}^{n-q}$ і $N^q = N_{1(2)}^q = \mathbf{E}_2^q \setminus N_{2(1)}^q$.

Процедуру утворення множини декомпозиційних клонів з досконалої ТМДФ (5) позначатимемо операторами $\overset{|clo}{\Rightarrow}$ (для $(n-q)$-класу) і $\overset{clo|}{\Rightarrow}$ (для *q*-класу). Якщо шукаються декомпозиційні клони q-класу, то об'єднуються лише ті субмінтерми $(n-q)$-класу, розбиті мінтерми яких мають однакові (фіксовані) субмінтерми q-класу. Відповідно, декомпозиційні клони $(n-q)$-класу формуються об'єднанням субмінтермів q-класу, розбиті мінтерми яких мають однакові (фіксовані) субмінтерми $(n-q)$-класу. Оскільки повну функцію Y досить задати значеннями Y^1 або Y^0, то не задані значення субмінтермів досконалої ТМДФ дописуються в процесі клонування як доповнення. Метою клонування є одержання максимальних клонів функції Y, кількість яких не перевищує 4. Останні одержуються після об'єднання однакових декомпозиційних клонів.

На підставі множини максимальних декомпозиційних клонів можна зробити висновок щодо декомпоновності функції Y для даного q-розбиття. Виходячи з аналогії декомпозиційних карт *Curtis*'а, булову функцію Y можна роздільно (і безповторно) здекомпонувати до (1), (2) чи (3) в тому разі, якщо принаймні для одного q-розбиття одержується множина максимальних клонів $(n-q)$ - або q-класу потужності не більше 2.

Операція об'єднання двох декомпозиційних клонів одного класу, зокрема, $\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\middle| E\right)$ і $\left(\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}\middle| F\right)$ чи $\left(E\middle|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right)$ і $\left(F\middle|\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}\right)$ утворює декомпозиційний клон цього ж класу:

$$\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\middle| E\right) \cup \left(\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}\middle| F\right) = \left(\begin{matrix} (A \cup C) \\ (B \cup D) \end{matrix}\middle| (E \cup F)\right) = \left(\begin{matrix} (A,C) \\ (B,D) \end{matrix}\middle| (E,F)\right) \tag{7}$$

$$\left(E\middle|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)\cup\left(F\middle|\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right)=\left((E\cup F)\middle|\begin{matrix}(A\cup C)\\(B\cup D)\end{matrix}\right)=\left((E,F)\middle|\begin{matrix}(A,C)\\(B,D)\end{matrix}\right) \tag{8}$$

Для однакових декомпозиційних клонів за умови рівності $A=C$ і $B=D$ маємо:

$$\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle|E\right)\cup\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle|F\right)=\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle|(E,F)\right) \tag{9}$$

$$\left(E\middle|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)\cup\left(F\middle|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)=\left((E,F)\middle|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right) \tag{10}$$

Формування декомпозиційних клонів $(n-q)$- і q-класу з досконалої ТМДФ функції Y, а них – множини максимальних клонів, покажемо на прикладі повної булової функції $Y^1=\{0,1,6,7,12,13,14,15\}$, наприклад, для 1-розбиття:

$$\overset{P^1}{\Rightarrow}\{l_1l_2l_3\mid l_4\}=\{0\mid 0,0\mid 1,3\mid 0,3\mid 1,6\mid 0,6\mid 1,7\mid 0,7\mid 1\}^1\overset{clo}{\Rightarrow}$$

$$\overset{clo}{\Rightarrow}\begin{cases}\overset{clo|}{\Rightarrow}\left\{\left(\begin{matrix}(0,3,6,7)\\(1,2,4,5)\end{matrix}\middle|0\right),\left(\begin{matrix}(0,3,6,7)\\(1,2,4,5)\end{matrix}\middle|1\right)\right\}\Rightarrow\\ \overset{|clo}{\Rightarrow}\left\{\left(0\middle|\begin{matrix}(0,1)\\\varnothing\end{matrix}\right),\left(1\middle|\begin{matrix}\varnothing\\(0,1)\end{matrix}\right),\left(2\middle|\begin{matrix}\varnothing\\(0,1)\end{matrix}\right),\left(3\middle|\begin{matrix}(0,1)\\\varnothing\end{matrix}\right),\left(4\middle|\begin{matrix}\varnothing\\(0,1)\end{matrix}\right),\left(5\middle|\begin{matrix}\varnothing\\(0,1)\end{matrix}\right),\left(6\middle|\begin{matrix}(0,1)\\\varnothing\end{matrix}\right),\left(7\middle|\begin{matrix}(0,1)\\\varnothing\end{matrix}\right)\right\}\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\left(\begin{matrix}(0,3,6,7)\\(1,2,4,5)\end{matrix}\middle|0,1\right)\right.=\left\{\left(\begin{matrix}(0,3,6,7)\\(1,2,4,5)\end{matrix}\middle|\mathbf{E}_2^1\right)\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\left(0,3,6,7\middle|\begin{matrix}(0,1)\\\varnothing\end{matrix}\right),\left(1,2,4,5\middle|\begin{matrix}\varnothing\\(0,1)\end{matrix}\right)\right\}=\left\{\left(0,3,6,7\middle|\begin{matrix}\mathbf{E}_2^1\\\varnothing\end{matrix}\right),\left(1,2,4,5\middle|\begin{matrix}\varnothing\\\mathbf{E}_2^1\end{matrix}\right)\right\}$$

Доозначити неповні декомпозиційні клони (оператор $\overset{add|}{\Rightarrow}$ – для $(n-q)$-класу, а $\overset{|add}{\Rightarrow}$ – для q-класу) можна за допомогою *таблиць доозначень* взаємним попарним їх об'єднанням (табл. 1 або 2). Процедура доозначення виконується до утворення максимальних (не)повних декомпозиційних клонів.

Таблиця 1

Доозначення неповних декомпозиційних клонів $(n-q)$-класу

$\overset{add\|}{\Rightarrow}$	$\left(\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\middle\|1\right)$	$\left(\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\middle\|2\right)$	$\left(\begin{matrix}G\\H\end{matrix}\middle\|3\right)$
$\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle\|0\right)$	$\left(\begin{matrix}A,C\\B,D\end{matrix}\middle\|0,1\right)$	$\left(\begin{matrix}A,E\\B,F\end{matrix}\middle\|0,2\right)$	$\left(\begin{matrix}A,G\\B,H\end{matrix}\middle\|0,3\right)$
$\left(\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\middle\|1\right)$		$\left(\begin{matrix}C,E\\D,F\end{matrix}\middle\|1,2\right)$	$\left(\begin{matrix}C,G\\D,H\end{matrix}\middle\|1,3\right)$
$\left(\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\middle\|2\right)$			$\left(\begin{matrix}E,G\\F,H\end{matrix}\middle\|2,3\right)$

Таблиця 2

Доозначення неповних декомпозиційних клонів q-класу

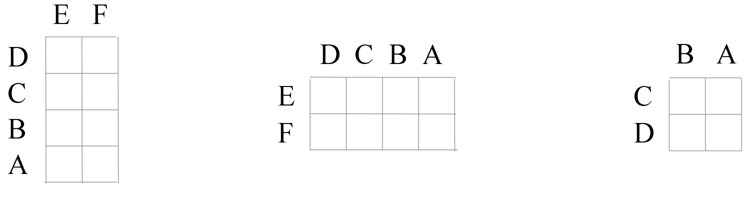
$\overset{\vert add}{\Rightarrow}$	$\left(1\,\middle\vert\,\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right)$	$\left(2\,\middle\vert\,\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\right)$	$\left(3\,\middle\vert\,\begin{matrix}G\\H\end{matrix}\right)$
$\left(0\,\middle\vert\,\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)$	$\left(0,1\,\middle\vert\,\begin{matrix}A,C\\B,D\end{matrix}\right)$	$\left(0,2\,\middle\vert\,\begin{matrix}A,E\\B,F\end{matrix}\right)$	$\left(0,3\,\middle\vert\,\begin{matrix}A,G\\B,H\end{matrix}\right)$
$\left(1\,\middle\vert\,\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right)$		$\left(1,2\,\middle\vert\,\begin{matrix}C,E\\D,F\end{matrix}\right)$	$\left(1,3\,\middle\vert\,\begin{matrix}C,G\\D,H\end{matrix}\right)$
$\left(2\,\middle\vert\,\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\right)$			$\left(2,3\,\middle\vert\,\begin{matrix}E,G\\F,H\end{matrix}\right)$

На підставі розглянутого вище можна сформулювати теорему про існування роздільної (безповторної) декомпозиції довільної булевої функції *n* змінних.

Теорема. Булева функція Y, задана ТМФ, допускає роздільну декомпозицію тоді і тільки тоді, якщо принаймні для одного q-розбиття мінтермів можна одержати не більше двох максимальних декомпозиційних клонів, причому:

1. якщо вони $(n-q)$-класу, то йдеться про однокомпонентну декомпозицію виду $\varphi(\varphi_1(X^{n-q}), X^q)$;
2. якщо вони *q*-класу, то йдеться про однокомпонентну декомпозицію виду $\varphi(X^{n-q}, \varphi_1(X^q))$;
3. якщо вони комплементарні, то йдеться про двоблокову декомпозицію виду $\varphi(\varphi_1(X^{n-q}), \varphi_2(X^q))$.

Доведення. Воно прямо випливає з теореми про роздільну декомпозицію [4] на підставі того, що скороченій карті q-розбиття (чи скороченій ТМДФ) відповідає множина максимальних клонів $(n-q)$- або q-класу, потужність якої не перевищує число 2. Для доведення цього на рис.2 розглянуто три можливі типи узагальнених (незаповнених) скорочених карт q-розбиття, де A, B, C, D, E, F – множини субмінтермів. Максимально можливі розміри останніх – 4×2 (*а*), 2×4 (*б*) і 2×2 (*в*) – визначаються на підставі того, що кожний рядок чи стовпець скороченої карти q-розбиття – це максимальний декомпозиційний клон відповідно $(n-q)$- чи q-класу, різних типів яких є рівно 4 (6).



а) *б*) *в*)

Рис.2 Узагальнені типи скорочених карт q-розбиття

Не важко показати, що залежно від фіксації множин субмінтермів кожну скорочену карту q-розбиття будь-якої булевої функції *n* змінних можна інтерпретувати як множину максимальних клонів $(n-q)$- або q-класу. Зокрема (рис.2,*а,б*), якщо A, B, C, D – фіксовані множини, то для карт (*а*) і (*б*) можна записати не більше 4-х максимальних клонів відповідно $(n-q)$- і q-класу. Натомість, якщо зафіксувати множини E, F, то для тих самих функцій можна сформувати не більше 2-х максимальних клонів q-класу для карти (*а*) і $(n-q)$-класу для карти (*б*). Очевидно, що потужність множини максимальних комплементарних клонів, яким відповідає скорочена карта q-розбиття (*в*), дорівнює 2 для обох класів.

Отже, для кожної скороченої карти q-розбиття існують дві рівноцінні множини максимальних клонів різних класів. Довести останнє не важко також за допомогою оберненого перетворення максимальних декомпозиційних клонів. Нехай A, B, C, D – фіксовані множини максимальних клонів $(n-q)$-класу відповідно (6) типу *а*), *б*), *в*) і *г*), що відображає узагальнена карта на рис.2,*а*). Перетворення множини максимальних клонів $(n-q)$-класу потужності 4 у відповідну множину максимальних клонів q-класу потужності 2 виконується так:

$$\overset{|\mathrm{clo}}{\Rightarrow}\left\{\left(A\middle|\begin{matrix}E,F\\ \varnothing\end{matrix}\right),\left(B\middle|\begin{matrix}F\\ E\end{matrix}\right),\left(C\middle|\begin{matrix}E\\ F\end{matrix}\right),\left(D\middle|\begin{matrix}\varnothing\\ E,F\end{matrix}\right)\right\}\Rightarrow\begin{cases}\{A\,|\,E, A\,|\,F, B\,|\,F, C\,|\,E\}^1 =\\ \{B\,|\,E, C\,|\,F, D\,|\,E, D\,|\,F\}^0 =\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}=\{(A,C)\,|\,E,(A,B)\,|\,F\}^1\\ =\{(C,D)\,|\,F,(B,D)\,|\,E\}^0\end{matrix}\right\}\overset{\mathrm{clo}|}{\Rightarrow}\left\{\left(\begin{matrix}A,C\\ B,D\end{matrix}\middle|E\right),\left(\begin{matrix}A,B\\ C,D\end{matrix}\middle|F\right)\right\}, \tag{11}$$

де $A\cup B\cup C\cup D\subseteq \mathbf{E}_2^{n-q}$ і $E\cup F\subseteq \mathbf{E}_2^{q}$, причому $A\cap B\cap C\cap D=\varnothing$ і $E\cap F=\varnothing$.

Очевидно, що проілюстроване перетворення можна поширити на інші типи максимальних клонів розглянутого $(n-q)$-класу (6, *а*, *б*, *в*, *г*), а також і на різні типи максимальних клонів q-класу (6, *а′*, *б′*, *в′*, *г′*).

Тобто, на підставі розглянутого вище дану теорему доведено.

Щоб визначити зв’язану та залишкову булеві функції здекомпонованої функції Y, необхідно кодувати та конкатенувати відповідні множини субмінтермів максимальних декомпозиційних клонів з множини значень $\{0,1\}$ [4].

1. Ashenhurst R.L. The decomposition of switching functions // Proc. Int. Symp. on the Theory of Switching, 1957 / Ann. of Comp. Lab. of Harvard University, Cambridge, Mass. – 1959. 29. P.74-116. 2. Curtis H.A. A new approach to the desing of switching circuits. N.J.:Princeton, Toronto. 1962. 3. Рицар Б.Є. Новий метод декомпозиції булових функцій // Відбір і обробка інформації. 1997. Вип. 11(87). С.32-36. 4. Рицар Б.Є. Декомпозиція булевих функцій методом q-розбиття // Управляющие системы и машины. 1999. №5. С.29-42. 5. Раков М.А., Кметь А.Б., Ланцов А.Л. и др. Специализированные многозначные анализаторы. – К., 1977. С.24-39. 6. Sasao T. Logic synthesis and optimization. Kluwer Academic Publishers. 1993. 7. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М., 1981.