УДК 621.3

Мельник А.О., Ерметов Ю.О.
ДУ “Львівська політехніка”, кафедра ЕОМ

ПАРАЛЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ КОРИГУВАННЯ ШВИДКОГО КОСИНУСНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Пропонується новий алгоритм обчислення матриці коригування швидкого косинусного перетворення. При паралельному обчисленні матриці коригування новий алгоритм характеризується значно меншою часовою затримкою порівняно з існуючим алгоритмом.

Вступ. Дискретне косинусне перетворення (ДКП) широко використовується в цифровій обробці сигналів для вирішення таких задач, як стисненення даних, псевдо-кепстральна обробка сигналів, узагальнена фільтрація зображень, виконання інших ортогональних тригонометричних перетворень (ОТП) тощо [1,2]. Задачі, в яких часова затримка отримання результату є критичним параметром, вимагають паралельного виконання алгоритмів.

До найшвидших алгоритмів ДКП належать алгоритми, які базуються на алгебраїчній структурі його матриці. Їх недоліками є значна похибка обчислень та надлишковість за кількістю операцій переміщення даних. Реалізація ДКП на базі алгоритмів швидких перетворень Фур‘є та Хартлі підвищує точність, проте збільшує обчислювальні затрати [2].

У даній роботі розглядається алгоритм швидкого косинусного перетворення (ШКП) з косинусними коефіцієнтами, який характеризується підвищеною точністю, зменшеною кількістю передач даних, а також найменшою кількістю обчислень для алгоритмів цього класу [2].

Алгоритм ШКП складається з двох частин: матриці перетворень (МП) та матриці коригування (МК). Внаслідок подібності структури МП до структури матриці швидкого перетворення Фур‘є апаратна реалізація МП є достатньо глибоко дослідженою, тому дана робота присвячена дослідженню матриці коригування.

Базовою операцією матриці коригування є операція накопичення добутків, паралельне обчислення якої характеризується великою часовою затримкою, для зменшення якої необхідні додаткові обчислювальні затрати.

Пропонується новий алгоритм обчислення матриці коригування, застосування якого для паралельного обчислення матриці коригування дозволяє значно зменшити часову затриску обчислень порівняно з існуючим алгоритмом при однакових з ним обчислювальних затратах.

Опис алгоритму ШКП. Швидкий алгоритм для реалізації прямого ДКП послідовності дійсних чисел $x_n, n = 0,1,\dots, N-1$,

$$L_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n C_N^{n,k}, \quad C_N^{n,k} = \cos\left[\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right], \qquad (1)$$

$k = 0,1,\dots, N-1$;

передбачає виконання таких кроків:

1) знаходяться елементи підпослідовностей a_n та b_n, де

$$a_n = x_n + x_{N-1-n}, \quad b_n = (x_n - x_{N-1-n})C_N^{n,1}, \tag{2}$$

$n = 0,1,...,N-1$;

2) виконується ДКП послідовностей a_n та b_n, знаходячи, відповідно, L_{2k} та B_k, $k = 0,1,...,N/2-1$;

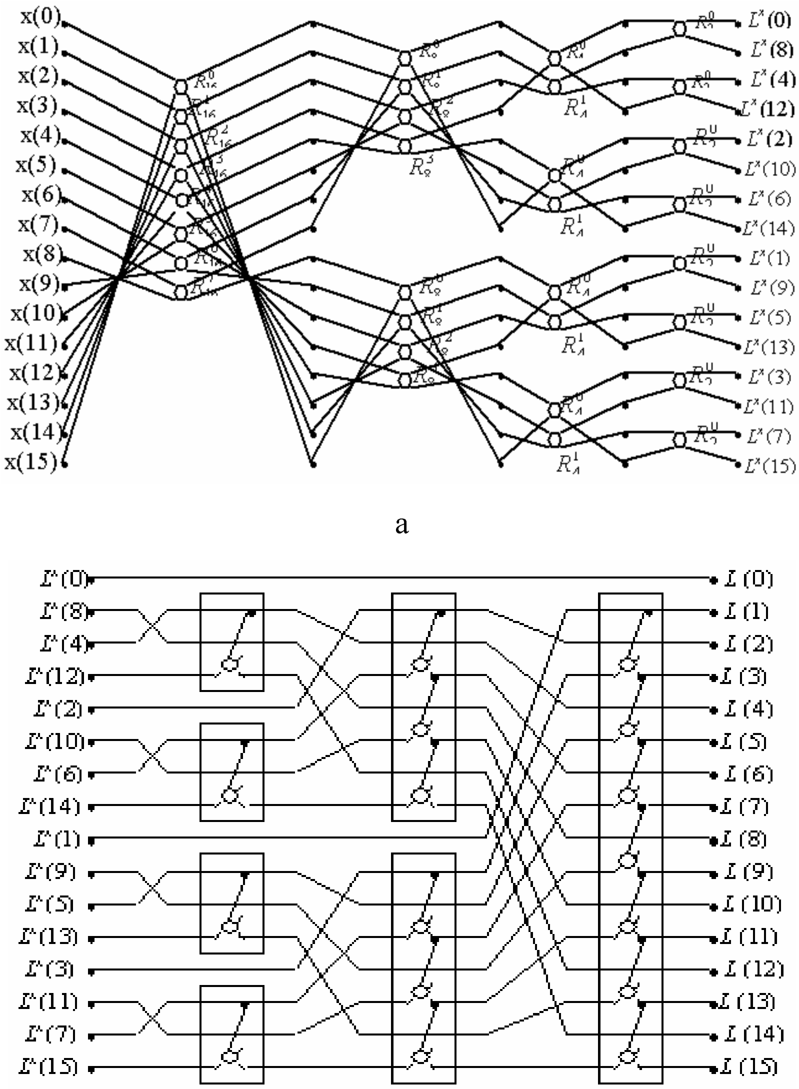
3) з використанням формули

$$L_1 = B_0, \quad L_{2k+1} = 2(-1)^k B_k - L_{2k-1}, \tag{3}$$

$k = 0,1,...,N/2-1$, отримуються непарні елементи L_k;

4) на основі попередніх кроків продовжується розбиття, доки не буде отримано 2-точкове ДКП .

На рис.1 показано направлений граф алгоритму ШКП при $R_N^n = C_N^{n,1}$ для N=16.



a

b

Рис.1. Направлений граф алгоритму ШКП для N=16:
a – матриця перетворень ШКП; b – матриця коригування ШКП

Алгоритм складається з двох частин: матриці перетворень (рис.1a) та матриці коригування (рис.1b). Дані після обробки в МП надходять до МК у двійково-інверсному порядку. Базова операція, яка виконується у МК, описується формулою (3). Її особливістю є ітераційний характер операції накопичуючого додавання проміжних результатів. Дані на вихід МК надходять у двійково-інверсному порядку.

Опис матриці коригування. Структуру направленого графу МК показано на рис.1,b.

Назвемо операцію, описану формулою (3), базовою операцією (БО), а сукупність з`єднаних між собою базових операцій – накопичуючою базовою операцією (НБО). Всі БО розподілені по ярусах, до кожного з яких належать НБО з однаковою кількістю базових операцій.

Позначимо кожну БО d_{ijk}, де i – номер яруса БО у матриці коригування, $i = 0,1,...,S-1$; j – номер НБО у i –му ярусі, $j = 0,1,...,A_i - 1$; k – номер БО в j -ій НБО i –го яруса, $k = 0,1,...,P_i - 1$.

Кількість ярусів у МК перетворення розміру N

$$S = \log_2 N - 1 \ . \tag{5}$$

Кількість НБО на i -му ярусі

$$A_i = N / 2^{i+2} \ . \tag{6}$$

Кількість БО на i -му ярусі для всіх НБО цього ярусу

$$P_i = 2^{i+1} - 1 \ . \tag{7}$$

Загальна кількість базових операцій у МК

$$P_s = \frac{N}{2}(\log_2 N - 2) + 1 \ . \tag{8}$$

В матриці коригування можна виділити окремі блоки НБО (рис.1), кожний з яких обробляє дані, які не обробляються в інших блоках. Кількість блоків для N-точкового перетворення дорівнює кількості ярусів МК $S = \log_2 N - 1$. Якщо i – номер блоку, $i = 0,1,...,\log_2 N - 2$, тоді i -й блок обробляє $N / 2^{i+1}$ чисел вхідної послідовності матриці коригування. Якщо j – номер числа у вхідній послідовності i -го блоку, $j = 0,1,...,N / 2^{i+1} - 1$, k – номер числа у вхідній послідовності матриці коригування, $k = 0,1,...,N-1$, тоді номери чисел з вхідної послідовності МК, які будуть оброблятись у i -му блоці, визначаються за формулою:

$$k = 2^{i-1} + 2^i j \ . \tag{9}$$

Паралельне обчислення матриці коригування. Для паралельного обчислення матриці коригування обчислювальні затрати визначаються загальною кількістю БО згідно з формулою (8). Часова затримка обчислень визначається кількістю ярусів МК та кількістю БО у найбільшій НБО:

$$T = (N/2 + \log_2 N - 1)T_{BO} , \tag{10}$$

де T_{BO} – затримка обчислення БО.

Велика затримка обчислення НБО визначається послідовним обчисленням БО у складі НБО. Для зменшення часу затримки отримання результату можна запропонувати схему паралельного обчислення НБО. На рис.2 показано направлені графи послідовної та паралельної схем обчислення 8-входової НБО.

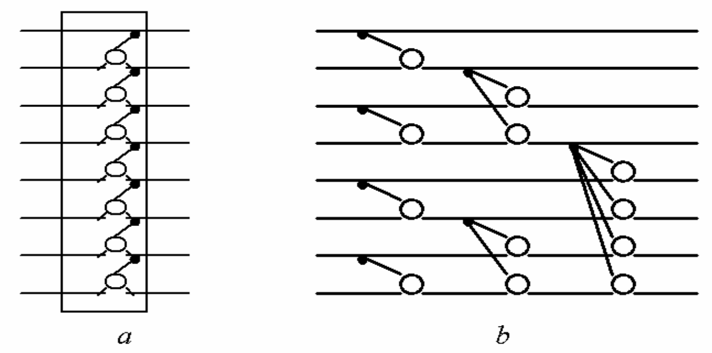


Рис. 2. Направлені графи НБО: а – послідовна схема обчислення НБО;
b – паралельна схема обчислення НБО

Якщо M – кількість входів НБО, $M = 2^p, p = 1,2,...$, то для послідовної схеми обчислення НБО кількість БО дорівнює M - 1 і затримка обчислення дорівнює $(M-1)T_{BO}$, а для паралельної схеми кількість БО дорівнює $M(\log_2 M)/2$ і затримка дорівнює $(\log_2 M)T_{BO}$.

На основі паралельної схеми обчислення НБО можна побудувати відповідний алгоритм для паралельного обчислення матриці коригування, направлений граф якого для N=16 показано на рис.3.

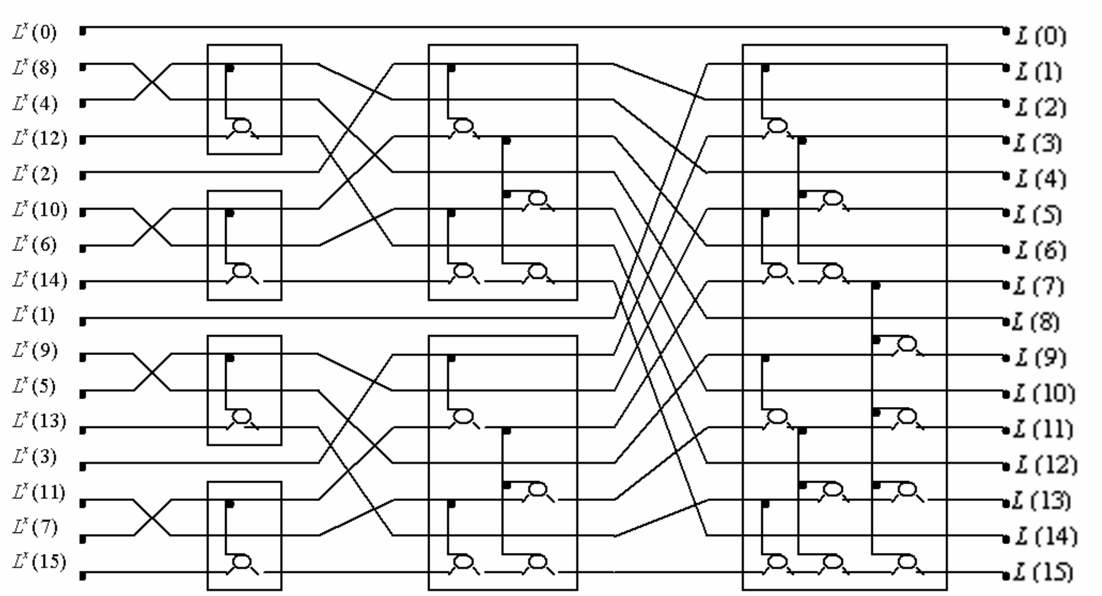


Рис.3. Направлений граф МК з паралельною схемою обчислення НБО

Кількість БО, необхідних для паралельного обчислення направленого графу, зображеного на рис.3, дорівнює:

$$P_s = \frac{N}{8}\log_2 N(\log_2 N - 1) \ . \tag{11}$$

Це значення в $(\log_2 N)/4$ разів перевищує значення кількості БО необхідного для паралельного обчислення звичайного графу, зображеного на рис.1.

Часова затримка обчислення МК

$$T = \frac{\log_2 N(\log_2 N - 1)}{2} T_{BO} \ . \tag{12}$$

Відношення отриманого значення затримки і значення, отримуваного з формули (10), приблизно визначається виразом $N/(\log_2 N)^2$, значення якого зростає зі збільшенням розміру перетворення N.

Тобто, застосування паралельної схеми обчислення НБО дозволяє значно зменшити затримку обчислень, проте вимагає значного збільшення обчислювальних затрат.

Новий алгоритм обчислення матриці коригування. Формула (3) описує операції на кожному ярусі матриці коригування. Для спрощення розглянемо матрицю корегування для розміру перетворення N=16. Опишемо операції на кожному ярусі за допомогою матриці коефіцієнтів, в якій стовпці визначають вхідні, а рядки – вихідні дані кожного ярусу. Якщо x_i і y_j – відповідно вхідні та вихідні дані яруса МК, a_{ij} – елементи матриці коефіцієнтів, $i, j = 0,1,\ldots, N-1$, тоді

$$y_j = \sum_{i=0}^{N-1} a_{ij} x_i \ . \tag{13}$$

У матрицях входи і виходи розташовані поблочно у порядку зростання.

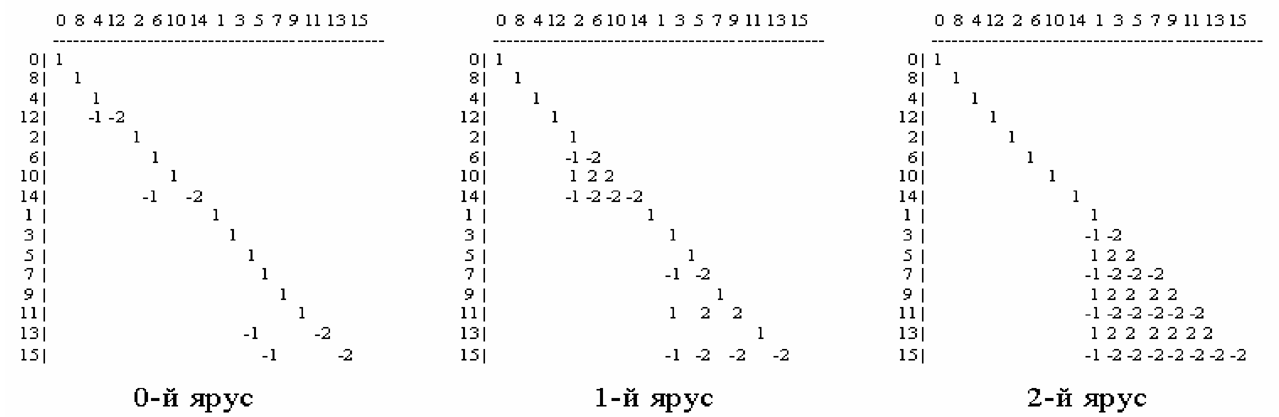


Рис.4. Матриці коефіцієнтів ярусів матриці коригування для N=16

Вихідні дані кожного ярусу одночасно є вхідними даними для наступного ярусу. Отримаємо матрицю коефіцієнтів для всієї матриці коригування для N=16. Якщо y_i і x_l – відповідно вихідні та вхідні дані МК, $i, l = 0,1,\ldots, N-1$, A_m – матриця коефіцієнтів m-го ярусу, $m = 0,1,2$, тоді

$$y_i = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{2ij} a_{1jk} a_{0kl} x_l \ . \tag{14}$$

Отриману матрицю коефіцієнтів показано на рис.5.

	0	8	4	12	2	6	10	14	1	3	5	7	9	11	13	15
0	1															
8		1														
4			1													
12			-1	-2												
2					1											
6					-1	-2										
10					1	2	2									
14					-1		-2	4								
1									1							
3									-1	-2						
5									1	2	2					
7									-1		-2	4				
9									1		2	-4	2			
11									-1	-2	-2		-2	-4		
13									1	2			2	4	-4	
15									-1				-2		4	-8

Рис.5. Матриця коефіцієнтів матриці коригування для N=16

Відповідно до матриці коефіцієнтів отримуємо потоковий граф обчислення матриці коригування. Побудова потокового графу базується на властивості матриці коефіцієнтів МК, при якій кожний елемент вихідної послідовності може бути отриманий на основі попередньо обчислених елементів даного блоку. Як видно на рис.5, кожний непарний елемент використовується для обчислення наступного парного елементу, кожна непарна пара елементів – для обчислення наступної пари, отримані чотири елементи – для обчислення наступних чотирьох елементів і т.д. Структуру отриманого графу показано на рис.6.

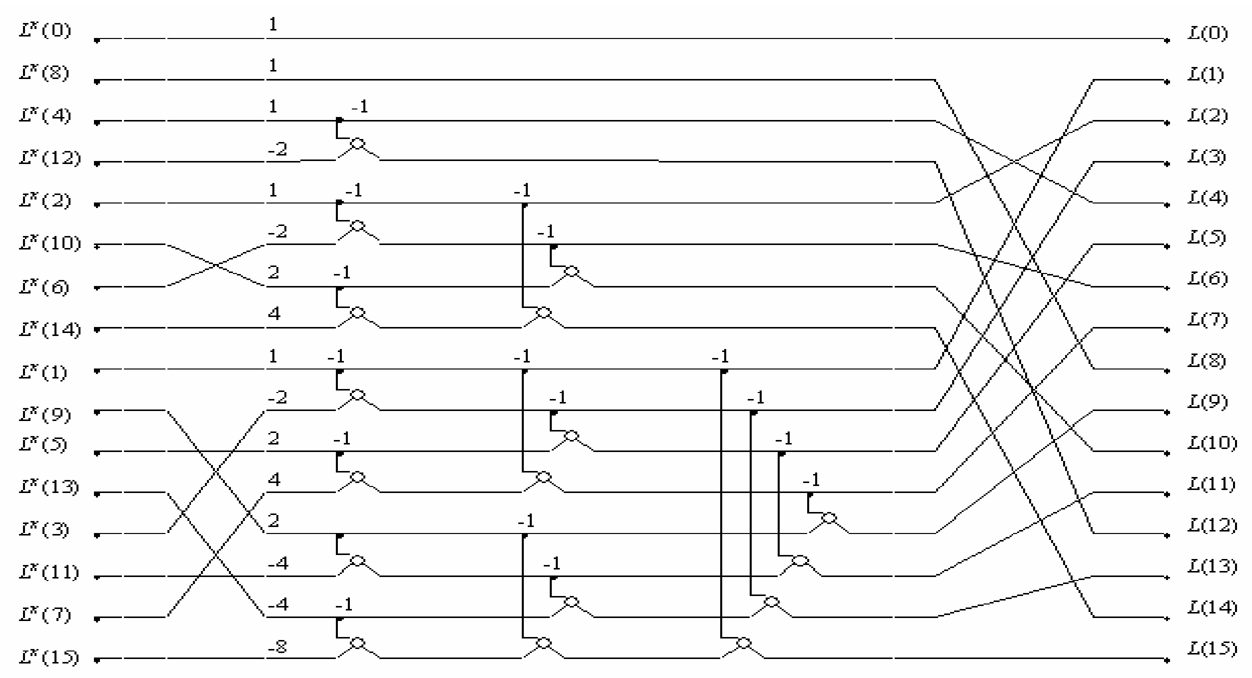


Рис.6. Структура направленого графу паралельної матриці коригування

Зазначимо такі особливості паралельної матриці коригування:

1) блокам НБО в звичайній МК відповідають блоки паралельної МК з такими ж елементами вхідної послідовності, в яких обробка здійснюється незалежно;

2) кожний елемент вхідної послідовності домножується на відповідний коефіцієнт головної діагоналі матриці коефіцієнтів;

3) утворення коефіцієнтів для блоків МК здійснюється за однаковим принципом, тобто найбільший за розміром блок містить коефіцієнти всіх інших блоків;

4) утворення коефіцієнтів головної діагоналі матриці коефіцієнтів відбувається за таким алгоритмом:

a) коефіцієнт першого елементу дорівнює 1;

b) коефіцієнт другого елементу дорівнює -2;

c) наступна група коефіцієнтів, довжина якої дорівнює кількості всіх попередніх коефіцієнтів, утворюється множенням попередніх коефіцієнтів на 2, причому перша половина множень відбувається зі знаком ‘+‘, а друга – зі знаком ‘-‘, тобто якщо a_i – попередні коефіцієнти, $i = 0,1,...,P-1$, тоді $a_{P+j} = 2a_j$, $a_{P+2j+1} = -2a_{2j+1}$, $j = 0,1,...,P/2-1$;

d) пункт c) виконується, доки не буде отримана необхідна кількість коефіцієнтів;

5) після множення на коефіцієнти елементи вхідної послідовності обробляються в множині двовходових БО, де БО описується таким виразом: $c = -a + b$, де a і b - вхідні операнди БО;

6) для отримання регулярної структури паралельної МК на вході здійснюється поблочне, а на виході загальне сортування елементів вхідної послідовності в порядку зростання їх номерів.

Опишемо множину БО.

Назвемо сукупність базових операцій, вхідні операнди яких, а також самі БО знаходяться на однаковій відстані, – групою базових операцій (ГБО). Всі БО розподілені по ярусах, до кожного з яких належать ГБО з однаковою кількістю базових операцій.

Позначимо кожну БО d_{ijk}, де i – номер яруса БО у матриці коригування, $i = 0,1,...,S-1$; j – номер ГБО у i-му ярусі, $j = 0,1,...,A_i - 1$; k - номер БО в j-ій ГБО i-го яруса, $k = 0,1,...,P_i - 1$.

Кількість ярусів у паралельній МК перетворення розміру N

$$S = \log_2 N - 1 . \tag{15}$$

Кількість ГБО на i-му ярусі

$$A_i = 2^i . \tag{16}$$

Кількість БО у ГБО на i-му ярусі

$$P_i = N/2^{i+1} - 1 . \tag{17}$$

Загальна кількість базових операцій у МК

$$P_s = \frac{N}{2}(\log_2 N - 2) + 1 . \tag{18}$$

Нехай *k* – номер елемента вхідної послідовності до множини БО, $k = 0,1,...,N-1$, який визначається з допомогою БО, тоді:

$$k = 2^{i+1}(k+2) - j - 1 . \tag{19}$$

Відстань між вхідними операндами БО i -го ярусу і j -й ГБО:

$$l = 2^{i+1} - 2j - 1\ . \tag{20}$$

Номер другого операнду збігається з номером позиції розміщення БО k, а номер першого операнду дорівнює $k-1$.

Базова операція в направленому графі нового алгоритму є двовходовою, проте новий алгоритм дозволяє отримувати графи з 4-, 8-, 16-входовими і т.д. БО за аналогією з алгоритмами ШПФ з більшими, ніж 2, основами.

Для паралельного обчислення МК на основі нового алгоритму необхідна кількість двовходових БО визначається з формули (13) і дорівнює кількості БО для паралельного обчислення існуючого алгоритму МК з послідовною схемою обчислення НБО (рис.1). Відповідно ця кількість в $(\log_2 N)/4$ разів менше кількості БО, необхідної для паралельного обчислення МК з паралельною схемою обчислення НБО (рис.3).

Часова затримка обчислення визначається кількістю ярусів ГБО:

$$T = (\log_2 N - 1)T_{BO}\,, \tag{21}$$

що в $N/(2\log_2 N - 2) + 1$ разів менше порівняно з алгоритмом з послідовною схемою обчислень НБО і в $(\log_2 N)/2$ разів менше порівняно з алгоритмом з паралельною схемою обчислень НБО.

Тобто, застосування нового паралельного алгоритму обчислення МК у будь-якому випадку є ефективнішим з точки зору обчислювальних та часових затрат порівняно з існуючим алгоритмом обчислення МК в алгоритмі ШКП.

Висновки. В даній роботі досліджено особливості матриці коригування в алгоритмі ШКП та проаналізовано можливості для її паралельного обчислення. Паралельне обчислення МК на основі стандартного алгоритму створює велику затримку отримання результату за рахунок ітераційного обчислення операції накопичення добутків. Для зменшення затримки запропоновано схему паралельного обчислення операцій накопичення добутків, застосування якої зменшує затримку обчислень, але вимагає значного збільшення обчислювальних затрат. Для спрощення паралельного обчислення матриці коригування розроблено новий паралельний алгоритм, в якому використовуються лише двовходові операції додавання і який характеризується значно меншою часовою затримкою при однакових обчислювальних затратах порівняно з існуючим алгоритмом.

Розглянуті особливості матриці коригування та підходи до її паралельного обчислення можуть бути застосовані при розробці алгоритмів для паралельного обчислення матриці коригування в алгоритмі оберненого ШКП, а також в швидких алгоритмах за методом Рейдера-Бренера інших ортогональних тригонометричних перетворень.

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. А.Л. Зайцева, Э.Г. Назаренко, Н.Н. Тетекина; Под ред. Ю.Н. Александрова. - М., 1978.
2. Яцимірський М.М. Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень. - Львів, 1997.