УДК 631.1:51

Г.А. Рибицька
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

НЕЧІТКА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Розглядається нечітка динамічна модель Леонтьєва з пам'яттю. Для випадку неповної інформації вводяться допуски на значення параметрів у вигляді інтервалів числової осі. Здатність оперувати з інтервалами замість чисел пояснюється поведінкою людей за умов невизначеності.

Leont'yev's fuzzy dynamic model with the memory is being considered. The permits for the numeral axis intervals as the parameter meanings are involved in an incomplete information occasion. The ability to deal with the intervals instead of the numerals is caused by the people behaviour in vagueness conditions.

Загалом, теорія нечітких множин [1,2] дала змогу узагальнити багато аспектів класичних задач. Вона тісно поєднана з нестаціонарними системами. Нечіткі системи функціонують у часі. Нестаціонарну систему можна описати як стаціонарну, ввівши нечіткі параметри. Хорошою ілюстрацією цього є статична модель Леонтьєва [3], що задається співвідношенням

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + y_i \tag{1}$$

із матрицею прямих затрат $A = \left\| a_{ij} \right\|$ і вектором кінцевого споживання $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$. Систему (1) можна записати в матричній формі

$$x = Ax + y. \tag{2}$$

Новий, що грунтується на засадах апроксимант Паде, метод відшукання розв'язків задачі (2) наведений в [4].

Але зауважимо, що модель Леонтьєва (1) не має пам'яті, оскільки в ній вихід за будь-якого моменту часу визначається тільки входом в цей момент. Але, користуючись цією моделлю, потрібно пам'ятати і про те, що виходи визначаються не тільки запитом – початкова кількість запасів також повинна бути відомою. Отже, якщо вважати, що початкова кількість запасів виражається довільним дійсним числом, то множину станів системи треба визначити як $X = R$ — числова вісь, і модель буде мати вигляд [5]

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) - b_i(t), \tag{3}$$

де $u_j(t)$ – випуск продукції j-ї галузі за період t. Отже, тут ендогенні змінні з запізнюючим аргументом типу $x(t)$ є присутніми в структурі моделі як допоміжні змінні і в сукупності з екзогенними змінними u і b становлять відомі для заданого моменту часу змінні системи, згідно з якими потрібно одержати значення біжучих ендогенних змінних.

У загальному випадку рівняння стану у векторно-матричній формі має вигляд

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Cf(t), \tag{4}$$

де x – вектор стану системи; u – керований вхід; а f – вплив середовища. Своєю чергою система впливає на середовище своїми вихідними змінними.

Продуктивна модель міжгалузевого балансу (1) безвідносна до часу, тобто всі її компоненти вважаються зосередженими в деякому часовому інтервалі і є "одномоментними". Реально, продукт, який призначено для внутрішнього і кінцевого споживання в період t, визначається не біжучим випуском, а випуском в наступний період $t + 1$. Ця затримка виробництва зумовлена багатьма чинниками, зокрема, інерцією планування та перенастроювання, мобілізацією внутрішніх ресурсів та зміною транспортування сировини тощо.

Враховуючи це, система рівнянь балансу за умови постійності частки внутрішнього споживання кожною галуззю матиме такий вигляд:

$$x(t+1) = Ax(t) + y(t). \tag{5}$$

Ця задача формулюється так: через заданий вектор кінцекого споживання $y(t)$ та матрицю прямих затрат A потрібно визначити динаміку (зміну в часі) вектора валового випуску $x(t)$.

Одна з основних задач прогнозування з використанням динамічної моделі Леонтьєва така: є відомими динаміка вектора кінцевого споживання $y(t)$ і вектор валового випуску x_0 в початковий момент часу $t = 0$; потрібно розрахувати вектор валового випуску в момент часу $t \geq 1$. Ця задача розв'язується згідно з рівнянням (5) так:

$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} y(k). \tag{6}$$

Більшість розглянутих до цього часу систем є детермінованими. Вони неадекватно описують економічні процеси і тому розв'язки, розроблених для них економіко-математичних моделей, рідко використовуються практично. Недетермінованість великих систем, зокрема й економічних, настільки очевидна, що це положення не має заперечень ні серед теоретиків, ні серед практиків. Але на сьогодні теорія та практика керування по суті ігнорує факт недетермінованості та необхідність врахування невизначеності інформації. Це призводить до ненадійності рішень, що приймаються, до значних негативних економічних та соціальних наслідків.

На теперішній стан розвитку науки для врахування невизначеності в рівняння моделі вводились випадкові величини. Тоді допускається, що точно відомим є ймовірнісний розподіл, який можна перевірити на підставі попередніх спостережень. Необхідність знання точного розподілу значень випадкових величин — вельми жорстке обмеження. У реальному житті воно виконується рідко (якщо це взагалі можливе).

У разі неповної інформації можна вводити допуски на значення параметрів у вигляді інтервалів числової осі.. Здатність оперувати з інтервалами замість чисел пояснюється поведінкою людей за умов невизначеності. Точний опис довільного реального процесу принципово неможливий. Використання експертних оцінок для визначення параметрів модел і – простий, загальний і цілком задовільний підхід.

Різниця між нечіткістю та ймовірністю наступна. Ймовірності пов'язані з випадковістю, грою випадку. Нечіткі ж множини мають справу з розмитістю, невизначеністю, отже, з суб'єктивністю.

Вважатимемо тепер, що в рівнянні (5) $x(t)$ і $y(t)$ — нечіткі множини, тобто

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t) + \tilde{y}(t), \tag{7}$$

де для простоти нечіткість позначена символом "~".

За визначенням Лофті Заде [1], нечітка множина є функцією належності

$$\mu : X \to [0,1],$$

де X – довільна множина-носій. Цей носій найчастіше є множиною, яка не має внутрішньої математичної структури. Множини ж, якими користуватимемось під час дослідження лінійних систем, повинні володіти певною структурою. Наприклад, якщо наділити носій структурою векторного простору, то постає питання, чи можна визначити відповідні операції над нечіткими множинами. Інакше кажуть, виникає бажання узагальнити операції додавання та множення на число в класі нечітких множин. Це легко зробити на підставі міркувань Лофті Заде [1].

Для довільного відображення $f : X \to Y$ і нечіткої множини $\mu \in F(X)$ образ μ за відображенням f – це нечітка множина

$$f(\mu) : X \to [0,1]$$

вигляду

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x), \text{ що } f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, \text{ що } f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases}$$

На основі цього визначаються операції додавання та множення в класі нечітких множин $F(X)$. Наприклад, якщо $\mu \in F(X)$ і $\lambda \in F(X)$, то сумою нечітких підмножин множини X називатимемо нечітку підмножину вигляду

$$(\mu + \lambda)(z) = \sup_{\substack{x + x' = z \\ z \in X^2}} (\mu(x), \lambda(x')).$$

Аналогічно визначається добуток, який довільним числу $r \in R$ і нечіткій множині $\mu \in F(X)$ визначає єдиний елемент з $F(X)$, який позначається через $r\mu$. Цей елемент визначають як образ μ згідно з відображенням $x \to rx$.

Це дає можливість розглянути лінійне перетворення $A: R^n \to R^n$ як

$$A(\lambda_1 + \lambda_2) = A(\lambda_1) + A(\lambda_2),$$

де

$$\lambda_1 : R^n \to [0,1], \quad \lambda_2 : R^n \to [0,1].$$

Значить,

$$(A(\lambda_1) + A(\lambda_2))(\omega) = \sup_{Ax + Ay = \omega} \min(\lambda_1(x), \lambda_2(y)) \tag{8}$$

Використовуючи цю рівність, запишемо

$$\tilde{x}(t) = A^t \tilde{x}(0) + \sum_{j=0}^{t-1} A^{t-j-1} \tilde{f}(j) \tag{9}$$

де $\tilde{x}(t)$ і $\tilde{f}(t)$ — нечіткі множини.

Цей процес розширює носій початкового нечіткого стану.

Для пояснення вищесказаного розглянемо, передусім, одновимірний випадок $X = R$ із $A = 1$. Ось, якщо $x(t)$ = (1/0,5; 2/0,9; 3/0,6) і $u(t)$ = (3/0,7; 4/0,8; 5/0,6), то згідно з (8) матимемо $x(t+1)$ = (4/0,5; 5/0,7; 6/0,8; 7/0,6; 8/0,6), оскільки, наприклад, 0,8=*max*(*min*(0,9; 0,8), *min*(0,5;0,6), *min*(0,6;0,7)).

Приклад. Нехай у динамічній моделі міжгалузевого балансу (7) є відомою продуктивна матриця затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix},$$

а також задані в момент часу $t = 0$ вектори випуску

$$\tilde{x}(0) = \left(\begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 40 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}5; \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}9; \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \\ 60 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}6 \right)$$

і

$$\tilde{y}(0) = \left(\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 5 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}6; \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}8; \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} \Big/ 0{,}7 \right).$$

Потрібно розрахувати вектор валового випуску в момент часу $t = 2$, якщо всі компоненти вектора кінцевого споживання y збільшуються на 30 % за кожний період циклу.

Розв'язування . За умовою задачі, вектор кінцевого споживання має вигляд

$$\tilde{y}(t) = (1{,}3)^t \tilde{y}(0).$$

Згідно з формулою (9) маємо

$$\tilde{x}(2) = A^2 \tilde{x}(0) + A\tilde{y}(0) + \tilde{y}(1) \qquad (10)$$

Тепер потрібно обчислити матрицю A^2 зміни стану і нечіткий вектор $\tilde{y}(1)$ і підставити їх у вираз (10). Отже,

$$\tilde{x}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}1175 & 0{,}0925 & 0{,}24 \\ 0{,}095 & 0{,}085 & 0{,}16 \\ 0{,}06 & 0{,}1 & 0{,}16 \end{pmatrix} \tilde{x}(0) + \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \tilde{y}(0) + 1{,}3\tilde{y}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}1175 & 0{,}0925 & 0{,}24 \\ 0{,}095 & 0{,}085 & 0{,}16 \\ 0{,}06 & 0{,}1 & 0{,}16 \end{pmatrix} \tilde{x}(0) + \begin{pmatrix} 1{,}35 & 0{,}35 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 1{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 1{,}5 \end{pmatrix} \tilde{y}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} (28{,}5/0{,}5; 33/0{,}9; 38{,}425/0{,}6) \oplus (60/0{,}6; 79/0{,}8; 96{,}5/0{,}7) \\ (22{,}6/0{,}5; 26/0{,}9; 30{,}25/0{,}6) \oplus (75/0{,}6; 92/0{,}8; 97/0{,}7) \\ (20{,}8/0{,}5; 24/0{,}9; 28{,}2/0{,}6) \oplus (18{,}5/0{,}6; 29/0{,}8; 46/0{,}7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(2) \\ \tilde{x}_2(2) \\ \tilde{x}_3(2) \end{pmatrix}$$

де

$\tilde{x}_1(2)$=(88,5/0,5;93,0/0,6;98,4/0,6;107,5/0,5;112,0/0,8;117,4/0,6;125/0,5;129,5/0,7;134,9/0,6),

$\tilde{x}_2(2)$=(97,6/0,5;101/0,6;105,25/0,6;114/0,5;118/0,8;119,6/0,5;122,25/0,6;123/0,7;127,25/0,6),

$\tilde{x}_3(2)$= (39,3/0,5;42,5/0,6;46,7/0,6;49,8/0,5;53/0,8;57,2/0,6;66,8/0,5;70/0,7;74,2/0,6).

Отже, для вказаного темпу зростання продукту кінцевого споживання найбільш реальною (із мірою належності $\mu = 0{,}8$) є потреба через два часові цикли збільшити компоненти валового випуску відповідно на 12%, 18% і 6% порівняно до вихідних значень початкового моменту часу.

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inf.Contr., 1965. 8. P.338–353. 2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М., 1981. 3. Никайдо Х. Выпуклые *структуры и математическая экономика. М., 1972. 4. Вінчерський М., Сявавко М. Економіко-математичний аналіз міжгалузевого балансу на основі апроксимант Паде // Регіональна економіка. 1998. №1. С.89-102. 5. Негойцэ К.В. Применение теории систем к проблемам управления. М., 1981.*

УДК 517.958:536.24:539.18

Є.Г. Грицько, О.М. Вовк
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ МІЖ ТРИМАЧЕМ ТА КОРПУСОМ ФОТОЕЛЕКТРОННОГО ПРИЛАДУ

Розв'язано задачу променево-кондуктивного теплообміну між елементами фотоелектронного приладу з використанням непрямого методу граничних елементів та восьмивузлової апроксимації.

The problem of radial heat exchange between of fotoelektronic device with use of indirect method of boundary elements and eight-knot approximation is solved.

Вступ

Значна частина фотоелектронних приладів працює в умовах різких перепадів температур. Навіть захисним кожухам корпусів цих приладів не вдається знизити перепад температур до потрібного значення. Тому одним з основних завдань під час конструювання та використання вакуумних фотоелектронних приладів є правильний вибір режимів охолодження. Важливими складовими, які необхідно враховувати під час розрахунку системи охолодження, є променевий та кондуктивний теплообмін. У деяких роботах, зокрема в [1,3,5], ці процеси розглянуті відокремлено. Метою цієї роботи є побудувати точнішу модель для опису променево-кондуктивного теплообміну між тримачем і корпусом фотоелектронного приладу, що своєю чергою забезпечить вищий ступінь ізотермічності на всій робочій поверхні активного фотоелектронного елемента.

Формулювання задачі

Розглянемо променево-кондуктивний теплообмін між тримачем Y^f та корпусом Y^g, які є циліндричними оболонками з паралельними осями.

Позначимо через Ω^g – внутрішню поверхню Y^g, а Ω^f – зовнішню поверхню Y^f. Вважаючи, що температурне поле на Ω^g, описується відомою функцією $T^g(x)$, а $T^f(x)$ – невідоме, розглянемо кондуктивний теплообмін в Ω^f та променевий між поверхнями Ω^f, Ω^g.

Для зручності дискретизацію та теплопровідності будемо розглядати в локальних циліндричних системах координат r^f, φ^f, z^f та r^g, φ^g, z^g, а променевий теплообмін – в гло-