УДК 517. 956

**М. М. Симотюк**
**Інститут прикладних проблем механіки і математики ІППММ НАН України ім. Я.С. Підстригача**

# ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ



**Досліджено коректність двоточкової крайової задачі для рівнянь з псевдо–диференціальними операторами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Доведено метричну теорему про оцінку знизу малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку задачі.**

**The correctness of twopoint boundary value problem for the equations with the pseudo-differential operators is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorem of lower bound estimation of characteristic determinant of the problem is proved.**

Задачам з багатоточковими умовами за виділеною координатою $t$ та умовами періодичності за іншими координатами для диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами присвячено значну кількість робіт (див. [1-5] та бібліографію в [2]). У цій роботі для рівняння з псевдодиференціальними операторами досліджується крайова задача із двома вузлами $t_1$ і $t_2$ ($a \le t_1 < t_2 \le b$), з яких один – кратний. На підставі метричного підходу вирішується проблема малих знаменників, що виникають під час побудови розв'язку задачі.

**1.** Нехай $G_{\beta,\delta}$, $\beta > 0$, $\delta > 0$, позначає простір $2\pi$-періодичних функцій $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \exp(ikx)$, для яких є скінченною норма $\|\varphi\|_{\beta,\delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k| \exp\left(\delta |k|^{\beta}\right)$. Через $C^n\left([a,b]; G_{\beta,\delta}\right)$ позначимо простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [a,b]$ похідні $\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}$, $j = 0,1,\ldots,n$, належать простору $G_{\beta,\delta}$ і як елементи цього простору є неперервними за $t$ на $[a,b]$. Норма в $C^n\left([a,b]; G_{\beta,\delta}\right)$ задається формулою $\|u\|_{n;\beta,\delta} = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{\beta,\delta} (t)$, де символ $\left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{\beta,\delta} (t)$ означає норму функції $\frac{\partial^j u}{\partial t^j}$ в просторі $G_{\beta,\delta}$ для фіксованого $t$ .

Множину послідовностей $\{A(t,k),\ k \in \varnothing\}$ дійснозначних неперервних на $[a,b]$ функцій $A(t,k)$, для яких справджується оцінка $\max_{t\in[a,b]} |A(t,k)| \le \gamma\left(1 + |k|^{\beta}\right), \gamma > 0, \beta > 0,$

позначимо через $S_{\beta,\gamma}$. Будь-яка послідовність $\{A(t,k),k \in \mathrm{H}\} \in S_{\beta,\gamma}$ породжує в просторі $C\left([a,b];G_{\beta,\delta}\right)$ псевдодиференціальний оператор $A(t,D)$, $D=-i\,\partial/\partial x$, дія якого на функцію $u(t,x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\,exp(ikx)$ визначається формулою $A(t,D)u(t,x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A(t,k)u_k(t)\times$ $\times exp(ikx)$, а область визначення

$$\mathcal{D}(A) \equiv \left\{ u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(ikx) : \left\| A(t,D)u(t,x) \right\|_{0;\beta,\delta} < \infty \right\}.$$

Будемо позначати через $S_{\beta,\gamma}(D)$ множину всіх операторів $A(t,D)$, породжуючі послідовності яких належать класу $S_{\beta,\gamma}$.

**2.** Розглядається рівняння вигляду

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(t,D)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = F(t,x),\ \ t\in(a,b),\ x\in\Omega, \qquad (1)$$

де $\Omega$ – одиничне коло $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $A_j(t,D)$, $j=1,\ldots,n$, псевдодиференціальні оператори з класу $S_{\beta,\gamma}(D)$. Потрібно знайти розв'язок $u(t,x)$ рівняння (1), який належить простору $C^n\left([a,b];G_{\beta,\delta}\right)\bigcap \mathcal{D}(L)$, $\mathcal{D}(L)=\bigcap_{j=0}^{n-1}\mathcal{D}(A_{n-j}\,(\partial/\partial t)^j)$, і задовольняє умови

$$\partial^{j-1}u(t_1,x)/\partial t^{j-1}=\varphi_j(x),\ \ j=1,\ldots,n-1,\ \ u(t_2,x)=\varphi_n(x),\ a\le t_1<t_2\le b,\ x\in\Omega. \qquad (2)$$

**3.** Розв’язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(ikx). \qquad (3)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв’язком такої задачі:

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(t,k)\frac{d^j u_k(t)}{dt^j} = F_k(t), \qquad (4)$$

$$u_k^{(j-1)}(t_1)=\varphi_{jk},\ \ j=1,\ldots,n-1,\ \ u_k(t_2)=\varphi_{nk}, \qquad (5)$$

де $F_k(t)$, $\varphi_{jk}$, $k\in\mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур’є функцій відповідно $F(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$,.

Нехай $f_1(t,k),\ f_2(t,k),\ldots,\ f_n(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}$, фундаментальна система розв’язків однорідного рівняння, яке відповідає (4), така що $f_q^{(j-1)}(a,k)=\delta_{j,q}$, ($\delta_{j,q}$ – символ Кронеккера), $W(t,k)$ – її вронскіан, $W_q(t,k)$ – алгебраїчне доповнення елемента $f_q^{(n-1)}(t,k)$ у визначнику $W(t,k)$, $H_k(t,\tau)=\sum\limits_{q=1}^{n} f_q(t,k)W_q(\tau,k)/W(\tau,k)$. Використовуючи метод варіації сталих, для розв’язку задачі (4), (5) дістанемо зображення $u_k(t)=\sum\limits_{q=1}^{n} C_{k,q}\,f_q(t,k)+\int\limits_a^t H_k(t,\tau)F_k(\tau)\,d\tau$, де сталі $C_{k,q}$, $q=1,\ldots,n$, визначаються з системи лінійних рівнянь

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{q=1}^{n} C_{k,q}\, f_q^{(j-1)}(t_1,k) = \varphi_{jk} - \int\limits_a^{t_1} \dfrac{\partial^{j-1} H_k(t_1,\tau)}{\partial t^{j-1}} F_k(\tau)\,d\tau, \ j=1,\ldots,n-1; \\
\sum\limits_{q=1}^{n} C_{k,q}\, f_q(t_2,k) = \varphi_{nk} - \int\limits_a^{t_2} H_k(t_2,\tau) F_k(\tau)\,d\tau.
\end{cases} \tag{6}
$$

Позначимо через $\Delta(k,t_1,t_2)$ визначник системи (6).

**Теорема 1.** *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^n\left([a,b];G_{\beta,\delta}\right)\cap\Upsilon\wp(L)$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\Delta(k,t_1,t_2)\neq 0,\ k\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

**Доведення** теореми аналогічне до доведення теореми 3.1 з розд. 2 [2].

Припустимо, що умови (7) виконуються. Тоді

$$
\begin{aligned}
u_k(t) = &\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Delta_{j,q}(k,t_1,t_2)}{\Delta(k,t_1,t_2)}\left[\varphi_{jk} - \int\limits_a^{t_1}\frac{\partial^{j-1}H_k(t_1,\tau)}{\partial t^{j-1}}F_k(\tau)\,d\tau\right] f_q(t,k) + \\
&+\sum_{q=1}^{n}\frac{W_q(t_1,k)}{\Delta(k,t_1,t_2)}\left[\varphi_{nk} - \int\limits_a^{t_2} H_k(t_2,\tau)F_k(\tau)\,d\tau\right] f_q(t,k) + \int\limits_a^{t} H_k(t,\tau)F_k(\tau)\,d\tau,
\end{aligned} \tag{8}
$$

де $\Delta_{j,q}(k,t_1,t_2), q, j=1,\ldots,n, j\neq n,$ – алгебраїчне доповнення елемента $f_q^{(j-1)}(t_1,k)$ у визначнику $\Delta(k,t_1,t_2)$. Підставляючи вираз (8) у формулу (3), отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = &\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(ikx)\left\{\sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\Delta_{j,q}(k,t_1,t_2)}{\Delta(k,t_1,t_2)}\left[\varphi_{jk} - \int\limits_a^{t_1}\frac{\partial^{j-1}H_k(t_1,\tau)}{\partial t^{j-1}}F_k(\tau)\,d\tau\right]\times\right. \\
&\left.\times f_q(t,k) + \sum_{q=1}^{n}\frac{W_q(t_1,k)}{\Delta(k,t_1,t_2)}\left[\varphi_{nk} - \int\limits_a^{t_2} H_k(t_2,\tau)F_k(\tau)\,d\tau\right] f_q(t,k) + \int\limits_a^{t} H_k(t,\tau)F_k(\tau)\,d\tau\right\}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

**4.** Ряд (9) може, взагалі кажучи, розбігатися, бо модулі виразів $\Delta_{j,q}(k,t_1,t_2)/\Delta(k,t_1,t_2)$, $j\neq n$, $W_q(t_1,k)/\Delta(k,t_1,t_2)$, $f_q(t,k)$, $q=1,\ldots,n$, можуть набувати як завгодно великих значень для нескінченної множини цілих $k$. Якщо $\varphi_j(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N}\varphi_{jk}\exp(ikx)$ і $F(t,x)=\sum\limits_{k=-N}^{N}F_k(t)\exp(ikx)$, то при виконанні умов (7) завжди існує розв'язок розглядуваної задачі, бо в цьому випадку (9) є скінченною сумою. У загальному випадку справедливе твердження.

**Теорема 2.** *Нехай оператори* $A_j(t,D), j=1,\ldots,n$, *належать класу* $S_{\beta,\gamma}(D), \beta>0$, $\gamma>0$, $\varphi_j(x)\in G_{\beta,\delta_1}, j=1,\ldots,n$, $F(t,x)\in C\left([a,b];G_{\beta,\delta_2}\right)$, *і нехай для кожного* $k\in\mathbb{Z}$ *справджується нерівність*

$$\left|\Delta(k,t_1,t_2)\right| > \exp\left(-\delta_3|k|^{\beta}\right), \qquad \delta_3>0. \tag{10}$$

*Якщо* $\delta_1 > \delta_3 + n\sqrt{n}\,\gamma(b-a)$, $\delta_2 > \delta_3 + (n+1)\sqrt{n}\,\gamma(b-a)$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (9), *належить класу* $C^n\left([a,b];G_{\beta,\delta}\right) \cap \mathfrak{M}(L)$, $\delta < \min\left\{\delta_1 - \delta_3 - n\sqrt{n}\,\gamma(b-a), \delta_2 - \delta_3 - (n+1)\sqrt{n}\,\gamma(b-a)\right\}$, $\delta > 0$, *і неперервно залежить від функцій* $F(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

**Доведення.** З теореми про апріорні оцінки розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь [6] випливає, що

$$\max_{t\in[a,b]}\left|f_q^{(j)}(t,k)\right| \le C_1\left(1+\delta_{j,n}|k|^{\beta}\right)\exp\left(\sqrt{n}\,\gamma(b-a)|k|^{\beta}\right),\ C_1>0,\ j=0,\ldots,n, \quad (11)$$

$$\max_{t,\tau\in[a,b]}\left|\frac{\partial^j H_k(t,\tau)}{\partial t^j}\right| \le C_2\left(1+\delta_{j,n}|k|^{\beta}\right)\exp\left(\sqrt{n}\,\gamma(b-a)|k|^{\beta}\right),\ C_2>0,\ j=0,\ldots,n. \quad (12)$$

Із формул (11) дістанемо

$$\left|\Delta_{j,q}(k,t_1,t_2)\right| \le C_3\exp\left((n-1)\sqrt{n}\,\gamma(b-a)|k|^{\beta}\right),\ C_3>0,\ \ j\ne n,\ q=1,\ldots,n, \quad (13)$$

$$\left|W_q(t_1,k)\right| \le C_4\exp\left((n-1)\sqrt{n}\,\gamma(b-a)|k|^{\beta}\right),\ C_4>0,\ q=1,\ldots,n. \quad (14)$$

Враховуючи нерівності (10) – (14), для розв'язку задачі (4), (5) отримаємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[a,b]}\left|u_k^{(j)}(t)\right| \le C_5\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|\xi_k + \max_{t\in[a,b]}\left|F_k(t)\right|\eta_k\right),\ C_5>0,\ j=0,1,\ldots,n, \quad (15)$$

де $\xi_k = \left(1+|k|^{\beta}\right)\exp\left(\left(\delta_3 + n\sqrt{n}\,\gamma(b-a)\right)|k|^{\beta}\right)$, $\eta_k = \xi_k\exp\left(\sqrt{n}\,\gamma(b-a)|k|^{\beta}\right)$. Якщо, $0 < \delta < \min\left\{\delta_1 - \delta_3 - n\sqrt{n}\,\gamma(b-a), \delta_2 - \delta_3 - (n+1)\sqrt{n}\,\gamma(b-a)\right\}$, то існує така стала $C_6 > 0$, що $\xi_k\left(1+|k|^{\beta}\right)\exp\left(\left(\delta-\delta_1\right)|k|^{\beta}\right) < C_6$ для $k \in \mathbb{Z}$ і $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k\left(1+|k|^{\beta}\right)\exp\left(\left(\delta-\delta_2\right)|k|^{\beta}\right) < C_6$. На підставі нерівностей (15)

$$\|u\|_{n;\beta,\delta} \le C_7\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|\xi_k\exp\left(\delta|k|^{\beta}\right) + \max_{t\in[a,b]}\left|F_k(t)\right|\eta_k\exp\left(\delta|k|^{\beta}\right)\right) \le$$

$$\le C_7\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\varphi_{jk}\right|\exp\left(\delta_1|k|^{\beta}\right)\xi_k\exp\left(\left(\delta-\delta_1\right)|k|^{\beta}\right) + \|F(t,x)\|_{0;\beta,\delta_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k\exp\left(\left(\delta-\delta_2\right)|k|^{\beta}\right)\right) \le$$

$$\le C_6C_7\left(\|F(t,x)\|_{0;\beta,\delta_2} + \sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j(x)\|_{\beta,\delta_1}\right),\ C_7>0. \quad (16)$$

Оскільки

$$\left\|A_{n-j}(t,D)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right\|_{0;\,\beta,\delta} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{t\in[a,b]}\left|A_{n-j}(t,k)u_k^{(j)}(t)\right|\exp\left(\delta|k|^{\beta}\right) \le$$

$$\leq \gamma\, C_5 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+\left|k\right|^{\beta}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|\xi_k \exp\left(\delta\left|k\right|^{\beta}\right)+\max_{t\in[a,b]}\left|F_k(t)\right|\eta_k \exp\left(\delta\left|k\right|^{\beta}\right)\right)\leq$$

$$\leq \gamma\, C_5 C_6\left(\left\|F(t,x)\right\|_{0;\beta,\delta_2}+\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j(x)\right\|_{\beta,\delta_1}\right), \qquad (17)$$

то $\partial^j u/\partial t^j \in \mathfrak{H}(A_{n-j})$, $j=1,\dots,n$. З нерівностей (16), (17) випливає доведення теореми.

**5.** Використаємо метричний підхід [2] для дослідження можливості виконання нерівності (10). Для цього нам знадобиться допоміжне твердження.

**Лема.** *Нехай функція* $f\in C^n([a,b];\mathbb{R})$ *і в кожній точці* $x\in[a,b]$

$$\max_{1\leq j\leq n}\left|f^{(j)}(x)\right|\leq M,\ \max_{1\leq j\leq n}\left|f^{(j-1)}(x)\right|\geq\delta.$$

*Позначимо* $G(f,\varepsilon):=\left\{x\in[a,b]:\ \left|f(x)\right|<\varepsilon\right\}$, $\operatorname{mes} A$ *– міра Лебега на прямій множини* $A$. *Тоді для довільного* $\varepsilon<\delta/2$

$$\operatorname{mes} G(f,\varepsilon)\leq n(n-1)\left([(b-a)M/\delta]+1\right)\sqrt[n-1]{\frac{2\varepsilon}{\delta}}.$$

**Доведення.** Використаємо ідею доведення леми 2 з [7]. Розіб'ємо $[a,b]$ на відрізки $\Delta_k$ так, що $\operatorname{mes}\Delta_k<\delta/M$, $1\leq k\leq[(b-a)M/\delta]+1=m$. Середину відрізка $\Delta_k$ позначимо через $x_k$. В множину $G(f,\varepsilon)$, $\varepsilon<\delta/2$, можуть входити точки тільки тих $\Delta_k$, для яких $\left|f(x_k)\right|<\delta$. Дійсно, якщо $\left|f(x_r)\right|\geq\delta$ для деякого $r$, то при $x\in\Delta_r$ $\left|f(x)\right|\geq\left|f(x_r)\right|-$ $-M\left|x-x_r\right|\geq\delta/2\geq\varepsilon$. Якщо ж $\left|f(x_r)\right|<\delta$, то існує $j$, $1\leq j\leq n-1$, таке, що $\left|f^{(j)}(x_r)\right|\geq\delta$. Тоді з теореми про скінченний приріст випливає, що $\left|f^{(j)}(x)\right|\geq\delta/2$ на всьому відрізку $\Delta_r$. За лемою 3 [8]

$$\operatorname{mes}(G(f,\varepsilon)\cap\Delta_r)\leq 2j\sqrt[j]{2j!\varepsilon/\delta}\leq n(n-1)\sqrt[n-1]{2\varepsilon/\delta}.$$

Отже, при $\varepsilon<\delta/2$

$$\operatorname{mes} G(f,\varepsilon)\leq\sum_{k=1}^{m}\operatorname{mes}(G(f,\varepsilon)\cap\Delta_k)\leq mn(n-1)\sqrt[n-1]{2\varepsilon/\delta}.$$

Лема доведена.

**Теорема 3.** *Якщо оператори* $A_j(t,D)$, $j=1,\dots,n$, *належать класу* $S_{\beta,\gamma}(D)$, $\beta>0$, $\gamma>0$, *то нерівність* (10) *виконується для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}^2$*) векторів* $(t_1,t_2)\in[a,b]^2$ *і для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел* $k$ *при* $\delta_3=\left((2n-1)\sqrt{n}+3n-1+\varepsilon\right)\gamma(b-a)$, $\varepsilon>0$.

**Доведення.** Диференціюючи за змінною $t_2$ розклад визначника $\Delta(k,t_1,t_2)$ за останнім рядком, отримаємо

$$\partial^{j-1}\Delta(k,t_1,t_2)/\partial t_2^{j-1}=\sum_{q=1}^{n}f_q^{(j-1)}(t_2,k)W_q(t_1,k),\ j=1,\dots,n. \qquad (18)$$

Для кожного фіксованого $t_1$ співвідношення (18) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно $W_q(t_1,k)$, $q=1,\ldots,n$, з ненульовим визначником, що дорівнює $W(t_2,k)$. Із правил Крамера та оцінок (11) дістанемо

$$\left|W_q(t_1,k)\right| \le n!C_1^{n-1}\exp\Big(\big((n-1)\sqrt{n}+1\big)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big)\max_{1\le j\le n}\left\{\left|\partial^{\,j-1}\Delta(k,t_1,t_2)/\partial t_2^{\,j-1}\right|\right\}.$$

Оскільки

$$\exp\Big(-\gamma(b-a)\big(1+\left|k\right|^{\beta}\big)\Big)\le\exp\left(-\int_a^{t_1}A_1(t,k)\,dt\right)=\left|W(t_1,k)\right|=\left|\sum_{q=1}^{n}f_q(t_1,k)W_q(t_1,k)\right|\le$$

$$\le nC_1\max_{1\le q\le n}\left\{\left|W_q(t_1,k)\right|\right\}\exp\Big(\sqrt{n}\,\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big),$$

то $\max\limits_{1\le q\le n}\left\{\left|W_q(t_1,k)\right|\right\}\ge\dfrac{1}{nC_1}\exp\Big(-(\sqrt{n}+1)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big)$ в кожній точці $t_1\in[a,b]$.

Отже,

$$\max_{1\le j\le n}\left\{\left|\partial^{\,j-1}\Delta(k,t_1,t_2)/\partial t_2^{\,j-1}\right|\right\}\ge\frac{1}{nC_1^{n-1}}\max_{1\le q\le n}\left\{\left|W_q(t_1,k)\right|\right\}\exp\Big(-\big((n-1)\sqrt{n}+1\big)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big)\ge$$

$$\ge\frac{1}{n\cdot n!C_1^{n}}\exp\Big(-\big(n\sqrt{n}+2\big)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big).$$

Зазначимо, що $\Delta(k,t_1,t_2)$ як функція змінної $t_2$ (при фіксованому $t_1$) є розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (4), з початковими умовами $\left.\dfrac{\partial^{\,j-1}\Delta(k,t_1,t_2)}{\partial t_2^{\,j-1}}\right|_{t_2=t_1}=\delta_{j,n}W(t_1,k)$, $j=1,\ldots,n$. Тому для $t_1,t_2\in[a,b]$

$$\max_{1\le j\le n}\left\{\left|\partial^{\,j-1}\Delta(k,t_1,t_2)/\partial t_2^{\,j-1}\right|\right\}\le C_8\big(1+\delta_{j,n}\left|k\right|^{\beta}\big)\exp\Big((\sqrt{n}+1)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big),\ C_8>0.$$

На підставі твердження леми одержимо, що міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини $M_k(t_1)$ тих значень $t_2\in[a,b]$, для яких нерівність

$$\left|\Delta(k,t_1,t_2)\right|\le\exp\Big(-\big((2n-1)\sqrt{n}+3n-1+\varepsilon\big)\gamma(b-a)\left|k\right|^{\beta}\Big),\qquad \varepsilon>0,\tag{19}$$

справджується при фіксованому $t_1$, має таку оцінку:

$$\operatorname{mes}M_k(t_1)\le C_9\big(1+\left|k\right|^{\beta}\big)\exp\Big(-\frac{\varepsilon}{n-1}\left|k\right|^{\beta}\Big),\ C_9>0.\tag{20}$$

Інтегруючи оцінку (20) за змінною $t_1$ на відрізку $[a,b]$, отримуємо, що нерівність (19) може виконуватися на множині значень $(t_1,t_2)\in[a,b]^2$, міра Лебега в $\mathbb{R}^2$ якої не перевищує $C_9(b-a)\big(1+\left|k\right|^{\beta}\big)\exp\Big(-\dfrac{\varepsilon}{n-1}\left|k\right|^{\beta}\Big)$. Оскільки при $\varepsilon>0$, $\beta>0$ ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\big(1+\left|k\right|^{\beta}\big)\exp\Big(-\dfrac{\varepsilon}{n-1}\left|k\right|^{\beta}\Big)$ збігається, то лема Бореля–Кантеллі [2] завершує доведення теореми.

**Зауваження.** Якщо порядок $n$ рівняння (1) непарне число, $A_j(t,D)\equiv 0$, $j=1,\ldots,n-1$, а оператор $A_n(t,D)\in S_{\beta,\gamma}(D)$ такий, що $A_n(t,k)\le 0$, $t\in[a,b]$ для всіх $k\in$ Н, то для розв'язку задачі (1), (2) умови єдиності (7) виконуються. Дійсно, $\Delta(k,t_1,t_2)$ за змінною $t_2$ є розв'язком однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (4) і має в точці $t_1$ нуль кратності $n-1$. За лемою 1 з [9] $\Delta(k,t_1,t_2)\ne 0$ при $t_2>t_1$.

*1. Пташник Б.Й. Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. 1966. № 10. С. 1254–1257. 2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.- К., 1984. 3. Ильків В.С., Полищук В.Н., Пташник Б.Й., Салыга Б.О. Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами // Укр. мат. журн. 1986. 38. № 5. С. 582-587. 4. Бернік В.І., Бересневіч В.В., Василишин П.Б., Пташник Б.Й. Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. 1999. 51. № 10. С. 1311-1316. 5. Валицкий Ю.Н. Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн. 1996. 37. № 2. С. 251-258. 6. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 288 с. 7. Пяртли А.С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его прилож. 1969. 3. № 4. С. 59–62. 8. Симотюк М. М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1999. 42. № 4. С. 90-95. 9. Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)}+p(x)y=0$ // Тр. Моск. мат. об.-ва. 1961. 10. С. 419-436.*

УДК 517

**Є.В. Черемних**
**Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої мтематики**

# ПРО УМОВУ СКІНЧЕННОСТІ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА НЕСАМОСПРЯЖЕНОЇ МОДЕЛІ ФРІДРІХСА У ПРОСТОРІ З ВАГОЮ



**Розглядається модель Фрідріхса у просторі функцій інтегровних з квадратом на півосі. За деяких умов гладкості на ядро збурення і на вагу дискретний спектр є скінченним. Побудовано приклад одновимірного збурення максимального диференціального оператора, що має нескінченну множину власних значень на неперервному спектрі.**

**Cheremnikh E. V. On the condition of finiteness of discrete spectrum of nonselfadjoint Friedrichs' model in the spase with weght. Friedrichs' model in the space of squared integrable on half line functions is considered. Under some conditions of smoothess on the kernel of the perturbation and the weight the discrete spectrum is finite.An exemple of one rank perturbation of maximal differential operator with infinite set of eigenvalues on continuous spectrum is given.**