де a_i – вільні параметри $(0 \prec a_i \prec 1)$ визначають проміжні вузлові точки на вказаному інтервалі інтегрування задачі (1).

За вказаною методикою побудовані конкретні методи до п'ятого порядку точності, які на підставі експерименту підтвердили свою високу ефективність.

УДК 519.62

М.В. Кутнів
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра прикладної математики

ПРО РЕАЛІЗАЦІЮ ТОЧНИХ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ МОНОТОННИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Обгрунтована реалізація точних триточкових різницевих схем через триточкові різницеві схеми m-го рангу при виконанні достатніх умов існування та єдиності розв”язку нелінійних монотонних крайових задач з кусково-гладкими коефіцієнтами та правими частинами. Побудовані триточкові різницеві схеми у вузлах сітки апроксимують розв”язок і його потік з m-м порядком точності.

The implementation of accurate three-point difference schems by three-point difference schems m-th order under a sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution nonlinear monotonic boundary value problems with piecewise smooth coefficients and right sides is proved. To construct a three-point difference schems at grid points approximate a solution and its flux with m-th order of accuracy.

У роботах [1,2] побудовані точні триточкові різницеві схеми (т.т.р.с.) для нелінійної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u(x)), \quad x\in(0,1), \quad u(0)=A, \quad u(1)=B, \tag{1}$$

за умов

$$k(x)\in Q^{p+1}[0,1], \quad 0<c_1\le k(x)\le c_2, \tag{2}$$

$$f_u(x)\equiv f(x,u)\in Q^p[0,1],\ \forall u\in R^1, \quad f_x(u)\equiv f(x,u)\in C^p(R^1),\ \forall x\in[0,1], \tag{3}$$

$$p=0,$$

$$|f(x,u)|\le g(x)+c|u|, \quad g(x)\in L_2(0,1), \tag{4}$$

$$[f(x,u)-f(x,v)](u-v)\le 0, \quad \forall u,v\in R^1, \tag{5}$$

що є достатніми умовами існування та єдиності розв”язку задачі (1). Тут $Q^p[0,1]$ - клас функцій з кусково-неперервними похідними до p–го порядку включно з скінченною кількістю точок розриву першого роду, c-невід”ємна константа. У [2,3] розроблена алгоритмічна реалізація т.т.р.с. через триточкові різницеві схеми (т.р.с.) m–го рангу за умов

(2)-(5) з $p = m$, а права частина т.р.с. додатково задовольняє умову $\frac{\partial \varphi^{(m)}(x,u)}{\partial u} \le 0$. У цій роботі побудовані та обгрунтовані т.р.с. m –го рангу числового розв'язування задачі (1) лише за виконання умов (2)-(5), де $p = m$.

Для простоти обмежимося рівномірною сіткою $\omega_h = \{x_j = jh, j = 1,2,...,N-1, \ h = 1/N\}$ та однією точкою розриву, що збігається з i-м вузлом сітки x_i, в якому виконуються умови

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \ \ k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i - 0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i + 0}.$$

Т.т.р.с. для задачі (1) має вигляд [4]

$$(au_{\bar{x}})_x = -\varphi(x,u), \ \ x \in \omega_h, \ \ u(0) = A, \ \ u(1) = B, \tag{6}$$

де

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h}V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \tag{7}$$

$$\varphi(x_j,u) = \left[hV_1^j(x_j)\right]^{-1}\int_{x_{j-1}}^{x_j} V_1^j(\xi) f(\xi,u(\xi))d\xi + \left[hV_2^j(x_j)\right]^{-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} V_2^j(\xi) f(\xi,u(\xi))d\xi,$$

функція $u(\xi)$ в правій частині останньої рівності визначається згідно з формулою

$$u(\xi) = u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1} b_\alpha V_\alpha^j(\xi) + w_\alpha^j(\xi,u), \ \ \xi \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \ \ j = 1,2,...,N-1, \tag{8}$$

$V_\alpha^j(x), \alpha = 1,2$ мають вигляд

$$V_1^j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{k(t)}, \ \ V_2^j(x) = \int_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{k(t)},$$

а $w_\alpha^j(x,u) \equiv w_\alpha^j(x,u,b_\alpha), l_\alpha^j(x,u) \equiv l_\alpha^j(x,u,b_\alpha), \alpha = 1,2$ -розв"язки задач Коші:

$$\frac{d}{dx}w_\alpha^j(x,u,b_\alpha) = \frac{l_\alpha^j(x,u,b_\alpha)}{k(x)}, \quad \frac{d}{dx}l_\alpha^j(x,u,b_\alpha) = -f(x,u_{j+(-1)^\alpha} +$$
$$+ (-1)^{\alpha+1} b_\alpha V_\alpha^j(x) + w_\alpha^j(x,u,b_\alpha)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},$$
$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha) = l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1,2,$$
$$b_\alpha = b_\alpha^j(u) = \left[V_1^j(x_{j+1})\right]^{-1}\Big\{2hu_{\overset{\circ}{x},j} + w_2^j(x_j,u) - w_1^j(x_j,u) +$$
$$+ (-1)^{\alpha+1} V_{3-\alpha}^j(x_j)\left[l_2^j(x_j,u) - l_1^j(x_j,u)\right]\Big\}, \quad \alpha = 1,2.$$

Зауважимо, що через функції $w_\alpha^j(x,u), l_\alpha^j(x,u), \alpha = 1,2$ можна записати праву частину т.т.р.с. $\varphi(x_j,u)$

$$\varphi(x_j,u) = h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^j(x_j,u) + (-1)^\alpha \frac{w_\alpha^j(x_j,u)}{V_\alpha^j(x_j)}\right]. \tag{9}$$

Згідно з [4], т.т.р.с. (6),(7) будемо реалізовувати через т.р.с. m -го рангу вигляду

$$(a^{(m)}y_{\bar{x}}^{(m)})_x = -\varphi^{(m)}(x, y^{(m)}), \quad x \in \omega_h, \quad y^{(m)}(0) = A, \quad y^{(m)}(1) = B,$$

$$a^{(m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h}V_1^{(m)j}(x_j)\right]^{-1}, \quad \varphi^{(m)}(x_j, y^{(m)}) = \tag{10}$$

$$= h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[l_{\alpha}^{(m)j}(x_j, y^{(m)}) + (-1)^{\alpha}\frac{w_{\alpha}^{(\overline{m})j}(x_j, y^{(m)})}{V_{\alpha}^{(m)j}(x_j)}\right].$$

де $\overline{m} = 2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$-ціла частина),

$$V_{\alpha}^{(m)j}(x_j) = (-1)^{\alpha+1}\sum_{p=1}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{k(x)}\right]_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}},$$

$$w_{\alpha}^{(s)j}(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^{\alpha}}}{k_{j+(-1)^{\alpha}}} + \sum_{p=3}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u, b_{\alpha}^{(s+1-p)})}{dx^p},$$

$$s = 2,3,\dots,\overline{m}, \quad \sum_{p=3}^{2} = 0, \quad w_{\alpha}^{(1)j}(x_j, u) = 0,$$

$$l_{\alpha}^{(s)j}(x_j, u) = (-1)^{\alpha}hf_{j+(-1)^{\alpha}} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u, b_{\alpha}^{(s-p)})}{dx^p},$$

$$s = 1,2,\dots,m, \quad \sum_{p=2}^{1} = 0, \quad l_{\alpha}^{(0)j}(x_j, u) = 0,$$

$$b_{\alpha}^{(s-2)} = b_{\alpha}^{(s-2)j}(u) = [V_1^{(s-1)j}(x_{j+1})]^{-1}\Big\{2hu_{\overset{\circ}{x},j} + w_2^{(s-1)j}(x_j, u) - w_1^{(s-1)j}(x_j, u) +$$

$$+ (-1)^{\alpha+1}V_{3-\alpha}^{(s-1)j}(x_j)[l_2^{(s-2)j}(x_j, u) - l_1^{(s-2)j}(x_j, u)]\Big\}, \quad s = 2,3,\dots,\overline{m}.$$

Для доведення існування та єдиності розв”язку, встановлення оцінки точності т.р.с. (10) потрібні такі твердження з [4].

Лема 1. Нехай $0 < c_1 \le k(x)$, $k(x) \in C^{m+1}[0, x_i] \cup C^{m+1}[x_i, 1]$, $f(x,u) \in \in C^m([0, x_i] \times R^1) \cup C^m([x_i, 1] \times R^1)$, тоді справедливі співвідношення

$$V_{\alpha}^j(x_j) = V_{\alpha}^{(m)j}(x_j) + O(h^{m+1}),$$

$$w_{\alpha}^j(x_j, u) = w_{\alpha}^{(\overline{m})j}(x_j, u) +$$

$$+ (1 - \overline{m} + m)\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}w_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u)}{dx^{m+1}} + O(h^{m+2}),$$

$$l_{\alpha}^j(x_j, u) = l_{\alpha}^{(m)j}(x_j, u) + O(h^{m+1}), \tag{11}$$

$$b_{\alpha}^j(u) = b_{\alpha}^{(m-1)j}(u) + O(h^m). \tag{12}$$

Лема 2. Нехай виконані умови леми 1, тоді

$$\left|a^{(m)}(x_j) - a(x_j)\right| \le Mh^m, \tag{13}$$

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)\right|\le Mh^m, \tag{14}$$

якщо m непарне;

$$\varphi^{(m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\left\{h^m\frac{k(x_j-0)}{(m+1)!}\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{l_2^{j-1}(x,u)}{k(x)}\right]_{x=x_j-0}\right\}_x+O(h^m), \tag{15}$$

якщо m парне, де стала M не залежить від h.

Теорема 1. Нехай виконані умови леми 1 , (4), (5), тоді $\exists h_1\in(0,h_0)$, що $\forall h\in(0,h_1]$ т.р.с. (10) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою

$$\left\|y^{(m)}-u\right\|^*_{1,2,\omega_h}=\left[\left\|y^{(m)}-u\right\|^2_{0,2,\omega_h}+\left\|k\frac{dy^{(m)}}{dx}-k\frac{du}{dx}\right\|^2_{0,2,\omega_h}\right]^{1/2}\le Mh^m,$$

де

$$k(x_j)\frac{dy^{(m)}(x_j)}{dx}=b_1^{(m-1)j}(y^{(m)})+l_1^{(m)j}(x_j,y^{(m)}).$$

Доведення. Розглянемо оператор $\mathcal{A}_h(x,u)=\mathcal{B}_h u-\varphi^{(m)}(x,u)$, $\mathcal{B}_h u=-(a^{(m)}u_{\bar{x}})_x$, визначений у скінченно-вимірному гільбертовому просторі $L_2(\omega_h)$ зі скалярним добутком та нормою

$$(u,v)=\sum_{\xi\in\omega_h}hu(\xi)v(\xi),\quad \|u\|_{0,2,\omega_h}=(u,u)^{1/2}.$$

Для сіткових функцій, заданих на $\omega_h^+=\omega_h\cup x_N$ введемо скалярний добуток і норму за формулами

$$(u,v)_{\omega_h^+}=\sum_{\xi\in\omega_h^+}hu(\xi)v(\xi),\quad \|u\|_{0,2,\omega_h^+}=(u,u)^{1/2}_{\omega_h^+}.$$

За умов теореми [2]

$$\left(\varphi(x,u)-\varphi(x,v),u-v\right)\le-\int_0^1 k(\eta)\left\{\frac{d}{d\eta}\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)-u(\eta)+v(\eta)\right]\right\}^2 d\eta\le$$

$$\le -c_1\int_0^1\left\{\frac{d}{d\eta}\left[\hat{u}(\eta)-\hat{v}(\eta)-u(\eta)+v(\eta)\right]\right\}^2 d\eta,$$

де в правій частині нерівності $u(\eta),v(\eta)$ визначені згідно з (8), а $\hat{u}(\eta),\hat{v}(\eta)$ мають вигляд

$$\hat{u}(\eta)=u_j\frac{V_1^j(\eta)}{V_1^j(x_j)}+u_{j-1}\frac{V_2^{j-1}(\eta)}{V_1^j(x_j)},\quad \hat{v}(\eta)=v_j\frac{V_1^j(\eta)}{V_1^j(x_j)}+v_{j-1}\frac{V_2^{j-1}(\eta)}{V_1^j(x_j)},\quad x_{j-1}\le\eta\le x_j.$$

Крім того, з (14), (15) випливає співідношення

$$\left(\varphi(x,u)-\varphi(x,v),u-v\right)=\left(\varphi^{(m)}(x,u)-\varphi^{(m)}(x,v),u-v\right)+O(h^m).$$

Звідси $\exists h_1\in(0,h_0)$, що $\forall h\in(0,h_1]$, $0<\tilde{c}_1\le a^{(m)}(x)$,

$$\left(\varphi^{(m)}(x,u)-\varphi^{(m)}(x,v),u-v\right)\le 0. \tag{16}$$

Тоді

$$\left(\mathcal{A}_h(x,u)-\mathcal{A}_h(x,v),u-v\right)\geq\left(\mathcal{B}_h(u-v),u-v\right)=\|u-v\|^2_{\mathcal{B}_h}\geq 8\tilde{c}_1\|u-v\|^2_{0,2,\omega_h}. \quad (17)$$

Отже, $\mathcal{A}_h(x,u)$, $\forall h\in(0,h_1]$-сильно монотонний оператор, а тому [5] $\forall h\in(0,h_1]$ т.р.с. (10) має єдиний розв'язок $y^{(m)}(x),\ x\in\omega_h$.

Для похибки $z(x)=y^{(m)}(x)-u(x),\ x\in\omega_h$ одержимо задачу

$$\begin{gathered}\left[a^{(m)}(x)z_{\bar{x}}(x)\right]_x+\varphi^{(m)}(x,y^{(m)})-\varphi^{(m)}(x,u)=\varphi(x,u)-\\-\varphi^{(m)}(x,u)+\left[\left(a(x)-a^{(m)}(x)\right)u_{\bar{x}}(x)\right]_x,\quad z(0)=z(1)=0.\end{gathered} \quad (18)$$

Рівняння (18) помножимо скалярно на z, тоді матимемо

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{B}_h z,z\right)-\left(\varphi^{(m)}(x,y^{(m)})-\varphi^{(m)}(x,u),y^{(m)}-u\right)=\\=\left(\varphi^{(m)}(x,u)-\varphi(x,u),z\right)+\left(\left(a-a^{(m)}\right)u_{\bar{x}},z_{\bar{x}}\right)_{\omega_h^+}.\end{gathered} \quad (19)$$

З врахуванням (16) справедлива оцінка

$$\left(\mathcal{B}_h z,z\right)-\left(\varphi^{(m)}(x,y^{(m)})-\varphi^{(m)}(x,u),y^{(m)}-u\right)\geq\|z\|^2_{\mathcal{B}_h} \quad (20)$$

За допомогою нерівності Коші-Буняковського, використовуючи (13)-(15), оцінимо праву частину рівності (19)

$$\begin{gathered}\left(\left(a-a^{(m)}\right)u_{\bar{x}},z_{\bar{x}}\right)_{\omega_h^+}\leq\left\|a^{(m)}-a\right\|_{0,2,\omega_h^+}\left\|u_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+}\left\|z_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+}\leq\\\leq Mh^m\left\|z_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+}\leq\frac{Mh^m}{\tilde{c}_1}\|z\|_{\mathcal{B}_h},\end{gathered} \quad (21)$$

$$\left(\varphi^{(m)}(x,u)-\varphi(x,u),z\right)\leq\left\|\varphi^{(m)}(x,u)-\varphi(x,u)\right\|_{0,2,\omega_h}\|z\|_{0,2,\omega_h}\leq\frac{Mh^m}{2\sqrt{2}\tilde{c}_1}\|z\|_{\mathcal{B}_h}, \quad (22)$$

якщо m-непарне;

$$\left(\varphi(x,u)-\varphi^{(m)}(x,u),z\right)\leq Mh^m\left\|z_{\bar{x}}\right\|_{0,2,\omega_h^+}\leq\frac{Mh^m}{\tilde{c}_1}\|z\|_{\mathcal{B}_h}, \quad (23)$$

якщо m-парне. З оцінок (20)-(23) випливає, що $\|z\|_{\mathcal{B}_h}\leq Mh^m$. Зауважимо, що енергетичний простір $H_{\mathcal{B}_h}$ збігається з простором $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega_h)$ і виконуються співвідношення еквівалентності норм

$$\gamma_1\|u\|_{1,2,\omega_h}\leq\|u\|_{\mathcal{B}_h}\leq\gamma_2\|u\|_{1,2,\omega_h},$$

де γ_1,γ_2-константи, які не залежать від h. Отже, $\|z\|_{1,2,\omega_h}\leq Mh^m$.

Оскільки

$$\begin{gathered}\left\|k(x)\frac{dz}{dx}\right\|_{0,2,\omega_h}=\left\|b_1^{(m-1)j}(y^{(m)})+l_1^{(m)j}(x,y^{(m)})-b_1^j(u)-l_1^j(x,u)\right\|_{0,2,\omega_h}\leq\\\leq\left\|b_1^{(m-1)j}(y^{(m)})+l_1^{(m)j}(x,y^{(m)})-b_1^{(m-1)j}(u)-l_1^{(m)j}(x,u)\right\|_{0,2,\omega_h}+\\+\left\|b_1^{(m-1)j}(u)-b_1^j(u)\right\|_{0,2,\omega_h}+\left\|l_1^{(m)j}(x,u)-l_1^j(x,u)\right\|_{0,2,\omega_h}=\end{gathered}$$

$$= \left\| \frac{\partial}{\partial u}\left[b_1^{(m-1)j}(u) + l_1^{(m)j}(x,u)\right]_{u=\tilde{u}} z + \frac{\partial}{\partial u_{\overset{\circ}{x},j}}\left[b_1^{(m-1)j}(u) + l_1^{(m)j}(x,u)\right]_{u=\tilde{u}} (z_{\bar{x},j+1} + z_{\bar{x},j}) \right\|_{0,2,\omega_h} +$$

$$+ \left\| b_1^{(m-1)j}(u) - b_1^{j}(u) \right\|_{0,2,\omega_h} + \left\| l_1^{(m)j}(x,u) - l_1^{j}(x,u) \right\|_{0,2,\omega_h},$$

то згідно з (11), (12), одержимо $\|z\|^*_{1,\infty,\omega_h} \le Mh^m$. Теорема доведена.

Для розв'язування нелінійної т.р.с. m-го порядку точності (10) застосуємо ітераційний метод.

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 1, тоді $\left|\varphi^{(m)}(x,u) - \varphi^{(m)}(x,v)\right| \le \tilde{L}|u-v|$, $\exists h_1 \in (0,h_0)$, що $\forall h \in (0,h_1]$, $0 < \tilde{c}_1 \le a^{(m)}(x)$, ітераційний метод

$$\mathcal{B}_h \frac{y^{(m,n)} - y^{(m,n-1)}}{\tau} + \mathcal{A}_h(x, y^{(m,n-1)}) = 0, \quad x \in \omega_h, \tag{24}$$

$$y^{(m,n)}(0) = A, \quad y^{(m,n)}(1) = B, \quad n = 1,2,..., \quad y^{(m,0)}(x) = A(1-x) + Bx,$$

$$\mathcal{B}_h y = -(a^{(m)} y_{\bar{x}})_x, \quad \mathcal{A}_h(x,y) = \mathcal{B}_h y - \varphi^{(m)}(x,y)$$

з $\tau = \tau_0 = \left(1 + \frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)^{-2}$ збігається і для похибки справедлива оцінка

$$\left\| y^{(m,n)} - u \right\|^*_{1,2,\omega_h} \le M(h^m + q^m), \quad q = \left(1 - \left(1 + \frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)^{-2}\right)^{1/2}, \tag{25}$$

де стала M не залежить від h,m,n.

Доведення. Згідно з теоремою 1 маємо

$$\left\| y^{(m,n)} - u \right\|^*_{1,2,\omega_h} \le \left\| y^{(m)} - u \right\|^*_{1,2,\omega_h} + \left\| y^{(m,n)} - y^{(m)} \right\|^*_{1,2,\omega_h} \le Mh^m + \left\| y^{(m,n)} - y^{(m)} \right\|^*_{1,2,\omega_h}. \tag{26}$$

Враховуючи, що $f(x,u) \in C^{(m)}([0,x_i] \times R^1) \cup C^{(m)}([x_i,1] \times R^1)$, одержимо

$$\left|\varphi^{(m)}(x,u) - \varphi^{(m)}(x,v)\right| \le \tilde{L}|u-v|.$$

За допомогою нерівності Коші-Буняковського оцінимо величину

$$\left(\mathcal{A}_h(x,u) - \mathcal{A}_h(x,v), w\right) \le \|u-v\|_{\mathcal{B}_h} \|w\|_{\mathcal{B}_h} + \left\|\varphi^{(m)}(x,u) - \varphi^{(m)}(x,v)\right\|_{0,2,\omega_h} \times$$

$$\times \|w\|_{0,2,\omega_h} \le \|u-v\|_{\mathcal{B}_h} \|w\|_{\mathcal{B}_h} + \tilde{L}\|u-v\|_{0,2,\omega_h} \|w\|_{0,2,\omega_h} \le \|u-v\|_{\mathcal{B}_h} \|w\|_{\mathcal{B}_h} +$$

$$+ \frac{\tilde{L}}{8}\|u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}}\|_{0,2,\omega_h} \|w_{\bar{x}}\|_{0,2,\omega_h} \le \left(1 + \frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)\|u-v\|_{\mathcal{B}_h} \|w\|_{\mathcal{B}_h}.$$

Покладемо $w = \mathcal{B}_h^{-1}\left(\mathcal{A}_h(x,u) - \mathcal{A}_h(x,v)\right)$, тоді

$$\left\| \mathcal{B}_h^{-1}(\mathcal{A}_h(x,u) - \mathcal{A}_h(x,v)) \right\|_{\mathcal{B}_h} \le \left(1 + \frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)\|u-v\|_{\mathcal{B}_h}. \tag{27}$$

З (17), (27) випливає

$$\left(\mathcal{A}_h(x,u)-\mathcal{A}_h(x,v),\mathcal{B}_h^{-1}(\mathcal{A}_h(x,u)-\mathcal{A}_h(x,v))\right)\le\left(1+\frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)^2\|u-v\|^2_{\mathcal{B}_h}\le$$

$$\le\left(1+\frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)^2\left(\mathcal{A}_h(x,u)-\mathcal{A}_h(x,v),u-v\right).$$

Отже, [6] ітераційний метод (24) збігається з $\tau=\tau_0=\left(1+\frac{\tilde{L}}{8\tilde{c}_1}\right)^{-2}$ в енергетичному просторі $H_{\mathcal{B}_h}$, який еквівалентний просторові $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega_h)$ і для похибки справедлива оцінка

$$\left\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\right\|_{1,2,\omega_h}\le M_1q^n.$$

Крім того

$$\left\|k(x)\frac{dy^{(m,n)}}{dx}-k(x)\frac{dy^{(m)}}{dx}\right\|_{0,2,\omega_h}=\left\|b_1^{(m-1)j}(y^{(m,n)})+l_1^{(m)j}(x_j,y^{(m,n)})-\right.$$

$$\left.-b_1^{(m-1)j}(y^{(m)})-l_1^{(m)j}(x_j,y^{(m)})\right\|_{0,2,\omega_h}\le\left\|\frac{\partial}{\partial y^{(m)}}\left[b_1^{(m-1)j}(\tilde{y}^{(m)})+l_1^{(m)j}(x_j,\tilde{y}^{(m)})\right]\times\right.$$

$$\left.\times(y^{(m,n)}-y^{(m)})+\frac{\partial}{\partial y^{(m)}_{\overset{\circ}{x},j}}\left[b_1^{(m-1)j}(\tilde{y}^{(m)})+l_1^{(m)j}(x_j,\tilde{y}^{(m)})\right]\left(y^{(m,n)}_{\overset{\circ}{x},j}-y^{(m)}_{\overset{\circ}{x},j}\right)\right\|_{0,2,\omega_h}\le$$

$$\le K\left\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\right\|_{1,2,\omega_h}\le M_2q^n.$$

Звідси одержимо, що

$$\left\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\right\|^*_{1,2,\omega_h}\le Mq^n. \qquad (28)$$

З нерівностей (26), (28) випливає оцінка (25).

1. Кутнів М.В. Існування точних триточкових різницевих схем для монотонних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. 1998. №337. Т.2. С.340-343. 2. Кутнив М.В. Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №3. С.387-401. 3. Кутнів М.В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності розв”язування нелінійних монотонних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. 1999. №364. С.114-120. 4. Кутнив М.В., Макаров В.Л., Самарский А.А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. №1. С.45-60. 5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980. 6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.