на початковій гіперплощині // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. 1999. № 364. С. 298-307. 7. Мединський І.П., Івасишен С.Д. Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. Ун-ту. Математика. 2000. Вип76. С. 45-50. 8. Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Математ. студії. 2000. Т.13. № 1. С. 33-46.

УДК 539.377

В.І. Гавриш, В.О. Волос
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірів

РІВНЯННЯ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ ІЗ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

За допомогою методу, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій, побудовано систему двох рівнянь термопружності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для смуги з прямокутним включенням та показано еквівалентність її системам рівнянь термопружності (система двох рівнянь для включення та смуги) та умовам ідеального механічного контакту на границях спряження.

System of two equations of thermal stresses with discontinuous and singular coefficients for strip with rectangular insertion was established using the method based on application of generalized functions. Have been proved equivalence of this system to the systems of thermal stresses equations (system of two equations for rectangular and strip) and to the requirements of ideal mechanical contact on boundaries of conjugation.

У роботі [1] отримано наближений аналітичний розв’язок стаціонарної задачі теплопровідності для ізотропної смуги із включенням прямокутної форми. Для визначення її напруженого стану у випадку плоскої динамічної задачі розглянемо рівняння руху в переміщеннях [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda^*(x,y)\cdot e^*-\beta^*(x,y)\theta\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\cdot e_1^*\right]=\rho(x,y)\ddot{u},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)e_1^*\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu(x,y)\cdot\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\lambda^*(x,y)\cdot e^*-\beta^*(x,y)\theta\right]=\rho(x,y)\ddot{\mathrm{v}}, \tag{1}$$

де u,v – компоненти вектора переміщень;

$$\mu(x,y)=\frac{E(x,y)}{2[1+\vartheta(x,y)]};\quad \lambda^*(x,y)=\frac{E(x,y)\vartheta(x,y)}{1-\vartheta^2(x,y)};\quad \beta^*(x,y)=\frac{\alpha_t(x,y)E(x,y)}{1-\vartheta(x,y)};$$

$E(x,y)$ – модуль пружності; $\vartheta(x,y)$ – коефіцієнт Пуассона; $\alpha_t(x,y)$ – температурний коефіцієнт лінійного розширення; $\rho(x,y)$ – густина; $\theta = t - t_n$; t -температурне поле; t_n – початкова температура; $\ddot{u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$, τ – час; $e^* = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$; $e_1^* = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$.

Термопружні характеристики (ТПХ) та температурний коефіцієнт лінійного розширення (ТКЛР) неоднорідної смуги подамо у вигляді

$$p(x,y) = p_1 + (p_0 - p_1)N(x,h)N(y,l), \tag{2}$$

де p_i, p_0 – ТПХ та ТКЛР відповідно смуги та включення;

$$N(x,h) = S_-(x+h) - S_+(x-h);$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$ – асиметричні одиничні функції [3].

Знайдемо похідні функцій, що входять у рівняння (1), використовуючи при цьому правило про диференціювання добутку двох кусково-неперервних функцій, що мають спільні точки розриву першого роду [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \mu(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu_0 - \mu_1)\times$$

$$\times\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-h+0}\cdot\delta_-(x+h) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=h-0}\cdot\delta_+(x-h)\right]\cdot N(y,l),$$

$$\tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right] = \mu(x,y)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} + (\mu_0 - \mu_1)\times$$

$$\times\left[\left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right|_{y=-l+0}\cdot\delta_-(y+l) - \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right|_{y=l-0}\cdot\delta_+(y-l)\right]\cdot N(x,h),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)\cdot e^*\right] = \mu(x,y)\frac{\partial e^*}{\partial x} + (\mu_0 - \mu_1)\times$$

$$\times\left[\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=-h} + \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right|_{x=-h+0}\right)\cdot\delta_-(x+h) - \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=h} + \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right|_{x=h-0}\right)\cdot\delta_+(x-h)\right]\cdot N(y,l),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\cdot e_1^*\right] = \mu(x,y)\cdot\frac{\partial e_1^*}{\partial y} + (\mu_0 - \mu_1)\times$$

$$\times\left[\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-l+0} + \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right|_{y=-l}\right)\cdot\delta_-(y+l) - \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=l-0} + \left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right|_{y=l}\right)\cdot\delta_+(y-l)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta^*(x,y)\theta\right]=\beta^*(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial x}+(\beta_0^*-\beta_1^*)\cdot\left[\theta\Big|_{x=h}\cdot\delta_+(x-h)-\theta\Big|_{x=-h}\cdot\delta_-(x+h)\right]\cdot N(y,l),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\beta^*(x,y)\theta\right]=\beta^*(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial y}+$$

$$+(\beta_0^*-\beta_1^*)\cdot\left[\theta\Big|_{y=l}\cdot\delta_+(y-l)-\theta\Big|_{y=-l}\cdot\delta_-(y+l)\right]\cdot N(x,h).$$

Тут $\delta_\pm(\zeta)=\dfrac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [3].

Підставивши вирази (3) у співвідношення (1), приходимо до рівнянь

$$\mu(x,y)\Delta u+\left[\mu(x,y)+\lambda^*(x,y)\right]\cdot\frac{\partial e^*}{\partial x}=(\mu_0-\mu_1)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=l-0}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\Big|_{y=l}\right)\cdot\delta_+(y-l)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=-l+0}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\Big|_{y=-l}\right)\cdot\delta_-(y+l)\right]\cdot N(x,h)+$$

$$+\left\{\left[2(\mu_0-\mu_1)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=h-0}+(\lambda_0^*-\lambda_1^*)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=h-0}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{x=h}\right)-(\beta_0^*-\beta_1^*)\theta\Big|_{x=h}\right]\cdot\delta_+(x-h)-\right.$$

$$\left.-\left[2(\mu_0-\mu_1)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=-h+0}+(\lambda_0^*-\lambda_1^*)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=-h+0}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{x=-h}\right)-(\beta_0^*-\beta_1^*)\theta\Big|_{x=-h}\right]\cdot\delta_-(x+h)\right\}\times$$

$$\times N(y,l)+\beta^*(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\rho(x,y)\cdot\ddot{u},$$

$$\mu(x,y)\Delta \mathrm{v}+\left[\mu(x,y)+\lambda(x,y)\right]\frac{\partial e^*}{\partial y}=$$

$$=(\mu_0-\mu_1)\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=h}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\Big|_{x=h-0}\right)\cdot\delta_+(x-h)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=-h}+\right.\right.\tag{4}$$

$$\left.\left.+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\Big|_{x=-h+0}\right)\cdot\delta_-(x+h)\right]\cdot N(y,l)+\left\{\left[2(\mu_0-\mu_1)\cdot\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{y=l-0}+(\lambda_0^*-\lambda_1^*)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=l}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{y=l-0}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-(\beta_0^*-\beta_1^*)\cdot\theta\Big|_{y=l}\right]\cdot\delta_+(y-l)-\left[2(\mu_0-\mu_1)\cdot\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{y=-l+0}+(\lambda_0^*-\lambda_1^*)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=-l}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\Big|_{y=-l+0}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-(\beta_0^*-\beta_1^*)\cdot\theta\Big|_{y=-l}\right]\cdot\delta_-(y+l)\right\}\cdot N(x,h)+\beta^*(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho(x,y)\ddot{\mathrm{v}},$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Подамо $\beta^*(x,y)$ та густину $\rho(x,y)$ у вигляді (2) і помножимо рівняння (4) на $\frac{1}{\mu(x,y)}$, використовуючи при цьому тотожність

$$\frac{1}{\mu(x,y)} \equiv \frac{1}{\mu_1} + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1}\right) \cdot N(x,h) \cdot N(y,l)$$

та властивості добутку асиметричних одиничних та імпульсних функцій [3]. У результаті отримаємо таку систему двох рівнянь термопружності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для визначення компонент вектора переміщень:

$$\Delta u + (1+\omega_\lambda^*) \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x} = \left\{ \left[2\left(\frac{\mu_0}{\mu_j} - 1\right) \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h-0} + \frac{1}{\mu_1}\left(\left(\lambda_0^* - \lambda_1^*\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h-0} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{x=h} \right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\beta_1^* - \beta_0\right)\Theta\big|_{x=h} \right)\right] \cdot \delta_+(x-h) - \left[2\left(\frac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right) \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=-h+0} + \frac{1}{\mu_1}\left(\left(\lambda_0^* - \lambda_1^*\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=-h+0} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{x=-h} \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\beta_0^* - \beta_1^*\right)\Theta\big|_{x=-h} \right)\right] \cdot \delta_-(x+h) \right\} \cdot N(y,l) + \left(\frac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=l-0} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\bigg|_{y=l} \right) \cdot \delta_+(y-l) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=-l+0} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\bigg|_{y=-l} \right) \cdot \delta_-(y+l) \right] \cdot N(x,h) + \omega_\beta^* \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega_\rho^* \cdot \ddot{u},$$

(5)

$$\Delta \mathrm{v} + \left(1+\omega_\lambda^*\right) \cdot \frac{\partial e^*}{\partial y} = \left(\frac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{x=h} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\bigg|_{x=h-0} \right) \cdot \delta_+(x-h) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{x=-h} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\bigg|_{x=-h+0} \right) \cdot \delta_-(x+h) \right] \cdot N(y,l) + \frac{1}{\mu_1} \left\{ \left[2 \cdot (\mu_0 - \mu_1) \cdot \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{y=l-0} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\lambda_0^* - \lambda_1^*\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=l} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{y=l-0} \right) - \left(\beta_0^* - \beta_1^*\right)\Theta\big|_{y=l} \right] \delta_+(y-l) - \left[2(\mu_0 - \mu_1) \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{y=-l+0} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\lambda_0^* - \lambda_1^*\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=-l} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\bigg|_{y=-l+0} \right) - \left(\beta_0^* - \beta_1^*\right)\Theta \bigg|_{y=-l} \right] \cdot \delta_-(y+l) \right\} N(x,h) + \omega_\beta^* \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \omega_\rho^* \ddot{\mathrm{v}}.$$

Тут $\omega_\varsigma^* = \frac{\varsigma_1}{\mu_1} + \left(\frac{\varsigma_0}{\mu_0} - \frac{\varsigma_1}{\mu_1}\right) \cdot N(x,h) N(y,l), \quad \left(\varsigma = \lambda^*, \beta^*, \rho\right).$

Покажемо, що система двох частково-вироджених диференціальних рівнянь із розривними та сингулярними коефіцієнтами (5), є еквівалентною системам рівнянь термопружності (система двох рівнянь для включення та смуги) та умовам ідеального механічного контакту на відрізках спряження.

Для доведення цього твердження зобразимо компоненти вектора переміщень u та v і температурне поле Θ у вигляді

$$w = w_1 + (w_0 - w_1)N(x,h)N(y,l),$$

де w_0, w_1 – неперервні функції в області відповідно смуги та включення.

Визначимо похідні функцій, що входять у систему рівнянь (5).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \Bigg[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)N(x,h) + (w_0 - w_1)\Big|_{x=-h} \times$$
$$\times \delta_-(x+h) - (w_0 - w_1)\big|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h)\Bigg] \cdot N(y,l),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \Bigg[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)N(x,h) +$$

$$+\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=-h} \cdot \delta_-(x+h) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h) +$$

$$+(w_0 - w_1)\big|_{x=-h} \cdot \delta'_-(x+h) - (w_0 - w_1)\big|_{x=h} \cdot \delta'_+(x-h)\Bigg] \cdot N(y,l),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right) \cdot N(x,h) \cdot N(y,l) +$$

$$+\left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=-l} \cdot \delta_-(x+l) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h)\right] \cdot N(y,l) + \tag{6}$$

$$+\left[(w_0 - w_1)\big|_{y=-l} \cdot \delta_-(y+l) - (w_0 - w_1)\big|_{y=l} \cdot \delta_+(y-l)\right]\Big|_{x=-h} \cdot \delta_-(x+h) -$$

$$-\left[(w_0 - w_1)\big|_{y=-l} \cdot \delta_-(y+l) - (w_0 - w_1)\big|_{y=l} \cdot \delta_+(y-l)\right]\Big|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x}\right) \cdot N(x,h) \cdot N(y,l) +$$

$$+\left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=-h} \cdot \delta_-(x+h) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h)\right] \cdot N(y,l) +$$

$$+\left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=-l} \cdot \delta_-(y+l) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=l} \cdot \delta_+(y-l)\right] \cdot N(x,h) +$$

$$+\left[(w_0 - w_1)\big|_{x=-h} \cdot \delta_-(x+h) - (w_0 - w_1)\big|_{x=h} \cdot \delta_+(x-h)\right]\Big|_{y=-l} \cdot \delta_-(y+l) -$$

$$-\left[(w_0-w_1)\big|_{x=-h}\cdot\delta_-(x+h)-(w_0-w_1)\big|_{x=h}\cdot\delta_+(x-h)\right]\Big|_{y=l}\cdot\delta_-(y-l).$$

Підставивши вирази (6) у систему рівнянь (5) та розділивши в отриманих співвідношеннях члени за характером особливостей, отримаємо системи рівнянь термопружності для смуги та включення і умови ідеального механічного контакту

$$\Delta u_l+\left(1+\frac{\lambda_l^*}{\mu_l}\right)\cdot\frac{\partial e_l^*}{\partial x}=\frac{1}{\mu_l}\cdot\left(\beta_l^*\cdot\frac{\partial\Theta_l}{\partial x}+\rho_l\cdot\ddot{u}_l\right),$$

$$\Delta \mathrm{v}_l+\left(1+\frac{\lambda_l^*}{\mu_l}\right)\cdot\frac{\partial e_l^*}{\partial x}=\frac{1}{\mu_l}\cdot\left(\beta_l^*\cdot\frac{\partial\Theta_l}{\partial y}+\rho_l\cdot\ddot{\mathrm{v}}_l\right) \qquad (l=0,\ 1),$$

$\delta_{xx}^{(0)}=\delta_{xx}^{(1)}$, $\delta_{xy}^{(0)}=\delta_{xy}^{(1)}$, $u_0=u_1$, $v_0=v_1$ для $|x|=h$, $|y|\le l$,

$\delta_{yy}^{(0)}=\delta_{yy}^{(1)}$, $\delta_{xy}^{(0)}=\delta_{xy}^{(1)}$, $u_0=u_1$, $v_0=v_1$ для $|y|=l$, $|x|\le h$,

де $\delta_{xx}^{(m)}$, $\delta_{xy}^{(m)}$, $\delta_{yy}^{(m)}$ (m = 0,1) – компоненти тензора напружень.

Одержані диференціальні рівняння термопружності з розривними та сингулярними коефіцієнтами (5) разом із рівнянням теплопровідності

$$\Delta T-\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)\cdot N(x,h)\cdot N(y,l)=(\lambda_0-\lambda_1)\times$$

$$\times\left\{\left[\Theta(-h,y)\cdot\delta'_-(x+h)-\Theta(h,y)\delta'_+(x-h)\right]\cdot N(y,l)+\left[\Theta(x,-l)\cdot\delta'_-(y+l)-\Theta(x,l)\delta'_+(y-l)\right]\cdot N(x,h)\right\}$$

становлять повну систему рівнянь для визначення динамічних температурних напружень у плоских тілах з включенням. Вони враховують умови ідеального термомеханічного контакту між однорідними елементами на відрізках спряження і дають можливість знаходити розв’язки для всієї області їх визначення, де $T=\lambda\,(x,y)\cdot\theta$; $\lambda\,(x,y)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідної смуги, поданий формулою (2) ; $\dot{T}=\dfrac{\partial T}{\partial\tau}$; a_k, λ_k (k = 0,1) – коефіцієнти температуро- і теплопровідності відповідно включення та смуги.

1. Гавриш В., Волос В. Задача теплопровідності для смуги із включенням прямокутної форми // Вісн. ДУ “Львівська політехніка” 1997. № 320. С. 28-33. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. К., 1975. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1977. 4. Кушнир Р.М. К решению задач термоупругости для кусочно-однородных тел с применением обобщенных функций. . М., 1983. Деп. в ВИНИТИ 10.01.84, № 323-84.