

УДК 621.

ПІДВИЩЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОЇ ПРОЦЕДУРИ ТОМОГРАФІЧНОГО ВІДТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ПРОВІДНОСТІ

© Михайло Дорожовець, Адам Ковальчик, 2000

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра “ Інформаційно-вимірювальна техніка”,
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Жешувська політехніка, кафедра “Метрологія та вимірювальні системи”, вул.В.Поля,2, 35-959, Жешув, Польща

*Дасться обґрунтування і наведено результати досліджень підвищення швидкості
збіжності та точності ітераційної процедури відтворення електричної провідності.*

*Дается обоснование и приводятся результаты исследований повышения быстродействия
итерационной процедуры реконструкции электрической проводимости.*

*The grounding and the results of the convergence and precise grows of the iteration procedure
electrical conductivity reconstruction are presented.*

1. Вступ

Томографія електричної провідності забезпечує відтворення образу просторового розподілу величин, пов'язаних з провідністю досліджуваного середовища всередині об'єкта і знаходить щораз ширше застосування як у промисловості, так і у медицині [1-8]. Безпосередньо вимірюваними величинами в томографічній системі, переважно, є електричні напруги чи струми на зовнішніх вимірювальних електродах, які загалом нелінійно пов'язані з шуканим розподілом провідності. Тому алгоритм відтворення провідності (обернена задача томографії провідності) є ітераційним, в якому нове наближення розподілу провідності розраховують на основі порівняння результатів вимірювань з результатами розв'язування модельної електричної задачі (так званої прямої задачі томографії провідності) за відомого поточного наближення провідності [1-8].

Пряму задачу ЕІТ найчастіше формують на основі апроксимації електричного поля в досліджуваному об'єкті методом скінченних (просторово розподілених) (МСЕ) чи дискретних (зосереджених) (МФЕ) елементів. В обох випадках ці схеми описують за методом вузлових напруг і кількість рівнянь дорівнює кількості вузлів апроксимації.

Загалом пряма і обернена задачі є погано зумовленими, тому для отримання якісного образу розподілу провідності вимагають застосування регуляризації. Через істотну нелінійність оберненої задачі ця проблема також пов'язана з малою швидкістю збіжності ітераційного процесу. Застосування схеми

вимірювань з екіпотенціальними електродами [3,4] забезпечує гарантовану стійкість прямої задачі, оскільки на останньому етапі не потребує явного чи неявного розрахунку оберненої матриці системи рівнянь вузлових напруг. Тому, застосовуючи таку схему, скінченнорізницевий якобіан для оберненої задачі знаходять теоретично без додаткових похибок. Завдяки цьому покращуються умови для підвищення точності і збіжності розв'язування оберненої задачі. В подальших дослідженнях приймаємо, що застосовано схему з екіпотенціальними електродами.

2. Забезпечення стійкості розв'язування оберненої задачі

Основною характеристикою, що свідчить про необхідність застосування регуляризації, є ступінь зумовленості (Cond) гесіана системи рівнянь [8]. У разі перевищення ним критичного рівня обов'язково слід вживати регуляризаційних заходів [3-5,8]. Зокрема, для 16-розрядного представлення чисел $p=16$ критичний рівень становить $\text{Cond}_{\text{тр}} = \sqrt{10^p} = \sqrt{10^{16}} = 10^8$. Нами досліджувалися апроксимаційні схеми з $n=8$ -ми, $n=12$ -ти та $n=16$ -ти вимірювальними електродами, для яких максимальна кількість елементів апроксимації n_e дорівнює кількості незалежних результатів вимірювань $M=n_e=n(n-1)/2$, тобто 28, 66 та 120. Для таких апроксимаційних схем ступінь зумовленості матриць не тільки перевищував критичне значення, але досягав рівня насичення- $>10^p = 10^{16}$ (рис.1), при якому звичайні регуляризаційні заходи не забезпечують стійкості розв'язування оберненої задачі.

Відомо [8-10], що забезпечення стійкості розв'язування томографічних задач досягають двома методами: прикінцевою регуляризацією та за допомогою первинної функціональної апроксимації зі скороченою кількістю елементів. Обидва методи ґрунтуються на методі найменших квадратів (МНК) [11].

Прикінцева регуляризація. Відтворення образу електричної провідності у класифікації обчислювальних задач належить до задачі оцінювання параметрів за нелінійним МНК [8]. Одним з найефективніших методів регуляризації при розв'язуванні задач такого типу є метод Левенберга-Марквардта [8], згідно з яким параметр регуляризації розраховують на основі попереднього оцінювання норми гесіана $\|H\| = \|J^T J\|$ рівняння МНК, так званого "машинного нуля" m_{eps} ($m_{eps} = 10^{-p}$) та кількості елементів апроксимації n_e :

$$\mu \approx \sqrt{n_e \cdot m_{eps}} \|H\| = \sqrt{n_e \cdot m_{eps}} \|J^T J\|. \quad (1)$$

Після введення такої регуляризації ступінь зумовленості гесіана гарантовано стає нижчим від критичного рівня. Однак це не тільки знижує точність результатів відтворення провідності, але й спричиняє дуже повільну збіжність ітераційного процесу відтворення провідності. Подібні результати отримані Т.Дудикевичем [7]. Зокрема, для доведення похибки відтворення провідності до рівня декількох відсотків необхідно понад 30 ітерацій, після яких похибка практично не зменшується.

Поліпшення зумовленості гесіана та збіжності ітераційного процесу можна досягнути завдяки врахуванню ефекту сильної нелінійності оберненої задачі, тобто не лише першої похідної, яку відображає якобіан, а також і другої похідної [8]. Однак при томографічному відтворенні відсутні не тільки аналітичні вирази перших і других похідних якобіана, але навіть аналітичні вирази для самих нелінійних залежностей, тому цей метод супроводжується різким зростанням обчислювальних затрат, необхідних для розрахунків скінченнорізницевих апроксимацій других похідних.

Скорочення кількості апроксимаційних елементів. Інший спосіб забезпечення стійкості полягає у застосуванні апроксимаційної схеми з меншою, ніж максимально можлива, кількістю елементів [10-11]. Оскільки ефективність МНК зростає при зменшенні відношення кількості шуканих параметрів до кількості

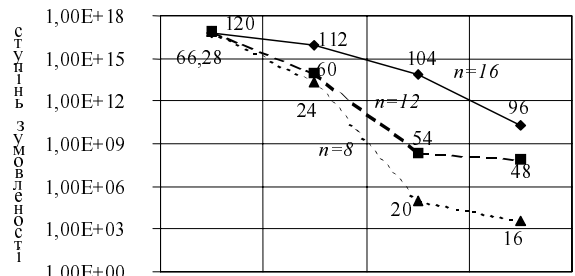


Рис. 1. Залежність ступеня зумовленості від кількості елементів

незалежних результатів вимірювань, то якщо неможливо збільшувати останні, необхідно зменшувати кількість невідомих. Слід враховувати, що зменшення кількості елементів спричиняє збільшення систематичної похибки апроксимації, а також погіршення роздільної здатності відтворення провідності. Тому метою дослідження цього методу є встановлення якомога більшої кількості апроксимаційних елементів, при якій обернена задача є ще стійкою.

Було розроблено апроксимації зі скороченою кількістю елементів (на рис.2 показані апроксимації МСЕ для 16-електродної схеми) і знайдено відповідні значення ступенів зумовленості гесіанів. Результати розрахунків наведено на рис.1, з якого видно, що при зменшенні кількості елементів лише на $n_e/2$ ($k=1$) число зумовленості гесіанів вже стає меншим за рівень насичення. Тобто у такому разі вже можна застосувати регуляризацію першого типу, наприклад згаданий вище метод Левенберга-Марквардта. Подальше зменшення кількості апроксимаційних елементів поліпшує ступінь зумовленості гесіанів, при цьому зі збільшенням кількості електродів швидкість такого поліпшення зменшується. Для того, щоб ступінь зумовленості став нижчим за критичний рівень $Cond_{tr} = 10^8$, кількість елементів апроксимації необхідно зменшити приблизно на 1/3-1/4 від максимального значення. Тобто для 16-електродної схеми кількість елементів треба скоротити зі 120 до 80-96 (рис.2).

3. Підвищення швидкості збіжності і точності ітераційного процесу

Для дослідження швидкості збіжності та точності відтворення провідності використовували тестові моделі (рис.3) з початковим нормованим значенням питомої провідності 1См/м і 100% зміною провідності- до 2См/м:

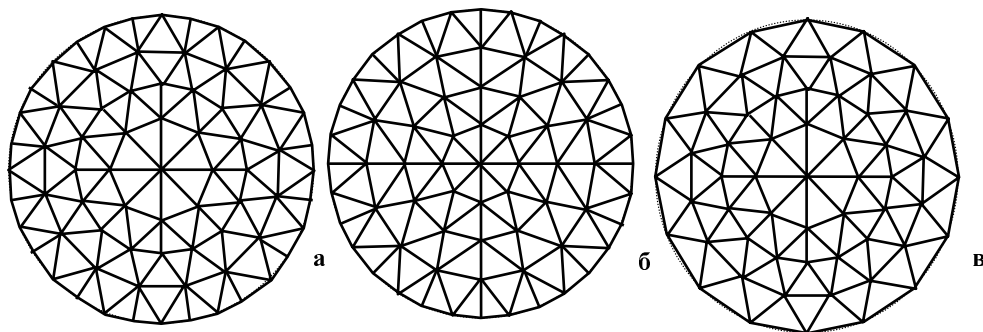


Рис. 2. Апроксимації скінченними елементами для 16- електродної схеми:
а – 96 елементів, 57 вузлів; б – 104 елементи, 69 вузлів; в – 112 елементів, 73 вузли

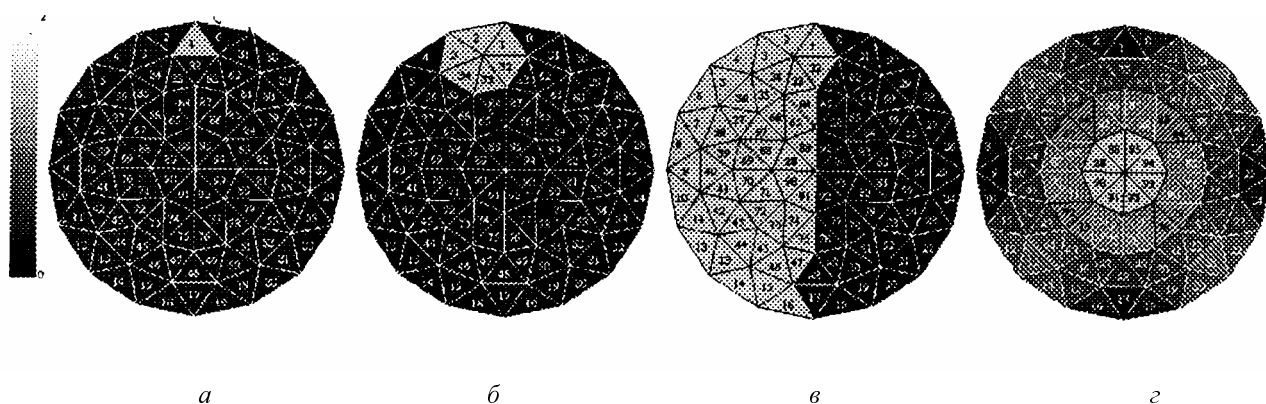


Рис.3.Тестові моделі розподілу провідності:
а – 1-го елемента; б – вузла; в – половини елементів; г – косинусна зміна

Модель 1. Імпульс (рис.3,а). Питому провідність 2См/м встановлено на одному елементі. Модель 2. Вузловий імпульс (рис.3,б). Питому провідність 2См/м встановлена на групі елементів, що прилягають до одного вузла. Модель 3. Стрибок (рис.3,в). Питому провідність 2См/м встановлено на половині елементів. Модель 4. Косинусна зміна (рис.3,г). Питому провідність з розмахом від 1 до 2См/м встановлено за двовимірною косинусною функцією $g_i = 1.5 + 0.5 \times \cos(\pi x_i/2) \cos(\pi y_i/2)$, де $|x_i|, |y_i| \leq 1$ – нормовані координати центрів апроксимаційних трикутників. Модель некорельованої рівномірно розподіленої випадкової зміни питомої провідності на рисунку не показано.

При відтворенні провідності початкове наближення у всіх випадках встановлювали однаковим і воно дорівнювало 1См/м. На кожній ітерації оцінювали відносну похибку відтворення кожного елемента

$$\delta^{ii} = \frac{\gamma_i^{ii} - \gamma_{im}}{\gamma_{im}} 100\%, \quad (2)$$

де γ_{im} – модельне значення провідності і-го елемента, іі-номер ітерації) і оцінки її характеристик: середнього (по всіх елементах) значення $\bar{\delta}^{ii} = \frac{1}{n} \sum \delta_i^{ii}$; стандартного відхилення $\sigma^{ii} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (\delta_i^{ii} - \bar{\delta}^{ii})^2}$ та максимального за модулем значення $-\delta_m^{ii} = \text{MAX}(|\delta_i^{ii}|)$.

Спочатку робили спробу відразу застосувати регуляризацію методом Левенберга-Марквардта. Для деяких моделей (зміна провідності одного елемента та вузла) результати були цілком успішними і відтворення провідності з похибкою до 1% отримано за 4-5 ітерацій. Для інших моделей (стрибок, тригонометрична та випадкова зміна провідності) прийнятні похибки (до 1%) відтворення образу провідності за обмежену кількість ітерацій отримати не вдалося. Тобто загалом ефективність цього методу виявилась недостатньою.

Модифікація методу Левенберга-Марквардта.

Незадовільна збіжність і точність ітераційної процедури пов'язана з тим, що загалом розраховуваний за (1) параметр регуляризації набуває на всіх ітераціях приблизно однакових значень. Це спричиняє те, що при великих початкових змінах провідності алгоритм ніби "заходить в насичення" і довший час не може належно відстежувати зміни провідності. Тобто на перших ітераціях цей параметр має замале значення. І навпаки, при малих змінах провідності його значення завелике, що спричиняє, подібно як в системах автоматичного регулювання, завелику похибку статизму. Отже, для поліпшення збіжності і точності ітераційної процедури на кожній ітерації необхідно здійснити адаптацію параметра регуляризації до поточних різниць відтвореної та фактичної провідностей на кожній ітерації $R(it)$.

Показник зміни в часі просторового розподілу провідності. Оскільки зміна провідності є шуканою, невідомою величиною, то постає запитання: як встановити факт великих чи малих змін провідності? Очевидно, що доступною для спостереження мірою такої близькості є вектор різниці виміряних та розрахованих за прямою задачею електродних струмів $\Delta I = Ix - I0$. Після закінчення ітераційного процесу ця різниця теоретично стає нульовою, а практично – входить в зону допустимої похибки. Однак в певних випадках зміна провідності і викликана цим різниця струмів можуть бути як завгодно великі, а теоретично точний результат відтворення провідності можна при цьому отримати лише за одну наступну ітерацію. Сказане стосується, зокрема, масштабної зміни провідності.

Річ у тім, що завдяки лінійності прямої задачі масштабна зміна провідності спричиняє таку саму масштабну зміну вектора вимірюваних струмів, що, у свою чергу, призводить до відповідної масштабної зміни відтвореної провідності. Дійсно, після чергового $i+1$ -го циклу вимірювань для відтворення провідності за її початкове наближення $\gamma_{i+1}^{(0)}$ на першій ітерації цього циклу беруть значення $\gamma_i^{(k)}$ отримане на останній k -й ітерації попереднього циклу: $\gamma_{i+1}^{(0)} = \gamma_i^{(k)}$. Тому першу ітерацію $i+1$ -го циклу можна розглядати як $k+1$ ітерацію попереднього i -го циклу, з заміною на новий вектор результатів вимірювань струму Ix_{i+1} , тобто

$$\begin{aligned} \gamma_{i+1}^{(1)} &= \gamma_{i+1}^{(0)} + REC_{i+1}^{(0)}(Ix_{i+1} - I0_{i+1}^{(0)}) = \\ \gamma_i^{(k)} + REC_i^{(k)}(Ix_{i+1} - I0_i^{(k)}) &\cong REC_i^{(k)}Ix_{i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

В останньому виразі враховано, що, розраховуючи якобіан системи рівнянь оберненої задачі, за початкове значення вектора $I0_i^{(k-1)}$ струму на k -й ітерації беремо результат розв'язування прямої задачі при розподілі провідності $\gamma_i^{(k-1)}$, завдяки чому в кінці ітераційного процесу $\gamma_i^{(k)} \cong REC_i^{(k)}I0_i^{(k)}$ та $\gamma_i^{(k+1)} \cong REC_i^{(k)}Ix_i$. Оскільки при зміні вектора провідності у C_m разів вектор електродних струмів зміниться також у C_m разів ($Ix_{i+1} = C_mIx_i$) то згідно з (3) відтворене значення провідності також зміниться у C_m разів: $\gamma_{i+1}^{(1)} \cong REC_i^{(k)} \times C_mIx_i = C_mREC_i^{(k)}Ix_i = C_m\gamma_i^{(k+1)}$.

Отже, абсолютна зміна вектора виміряних струмів, хоча і відображає зміну провідності, однак безпосередньо не може служити показником швидкості збіжності ітераційного процесу. Для оцінювання ступеня близькості електродних струмів з погляду керування швидкістю ітераційного процесу відтворення провідності нами запропоновано застосувати числові характеристики функції відношень електродних струмів при зміні провідності

$$g_{j,i} = \frac{Ix_{j,i}}{Ix_{j,i-1}}, j = 1...ne. \quad (4)$$

Якщо всі значення v_j є однаковими, то це свідчить про масштабну зміну провідності, що зумовлює отримання результату за одну ітерацію. Чим більша неоднорідність величини v_j , тим слід очікувати тривалішого ітераційного процесу. Для характеристики немасштабної зміни провідності нами запропоновано використовувати зведений половинний розмах зміни відношень електродних струмів $g_i = \frac{\max(v_{ji}) - \min(v_{ji})}{2v_i}$ та зведене стандартне відхилення $\zeta_i = \sigma_{v,i} / \bar{v}_i$, де \bar{v}_i – середнє значення відношень струмів, $\sigma_{v,i}$ – їх стандартне відхилення. Очевидно, що зведене стандартне відхилення несе інформацію про інтегральну немасштабну зміну провідності, а розмах – про найбільшу локальну зміну. Їх зіставлення дає можливість судити про характер немасштабної зміни провідності.

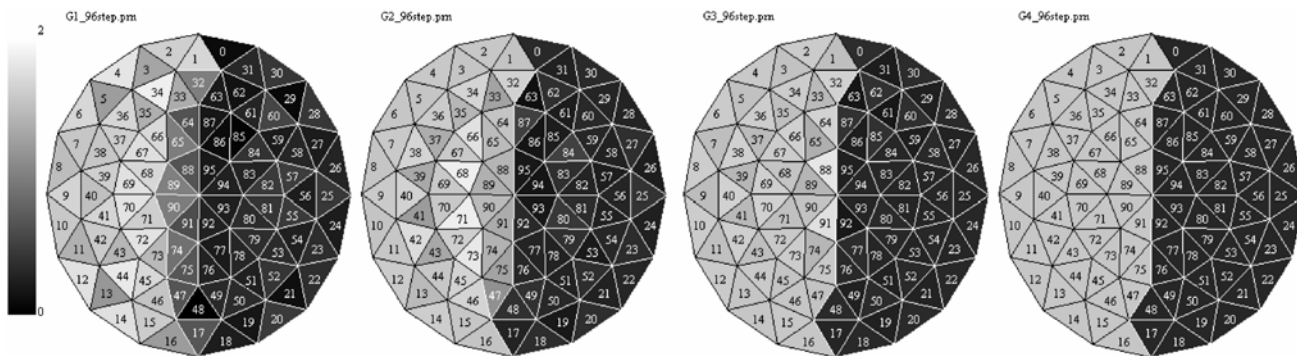


Рис. 4. Відтворення стрибкоподібної зміни провідності

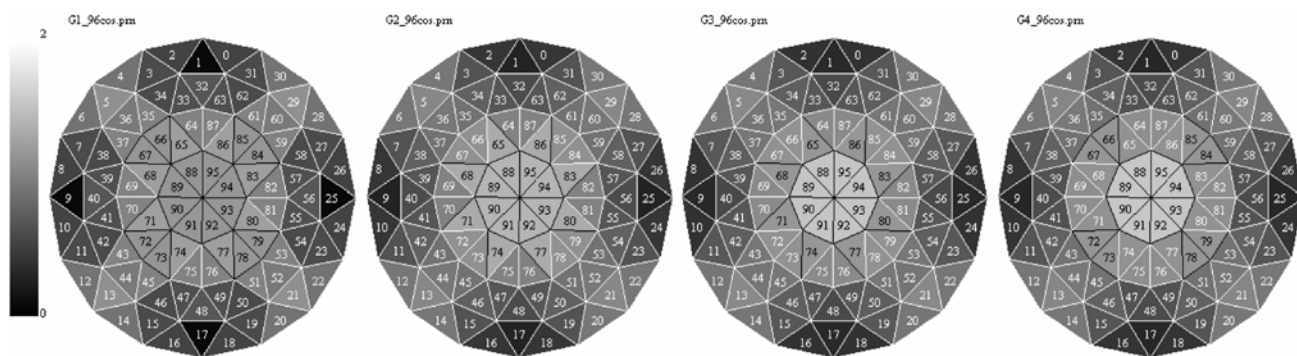


Рис. 5. Відтворення косинусної зміни провідності

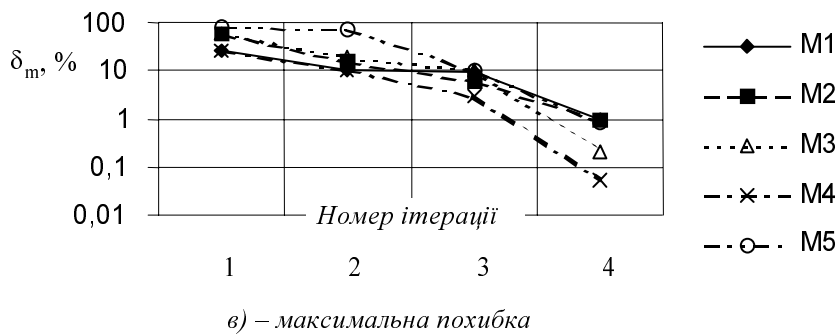
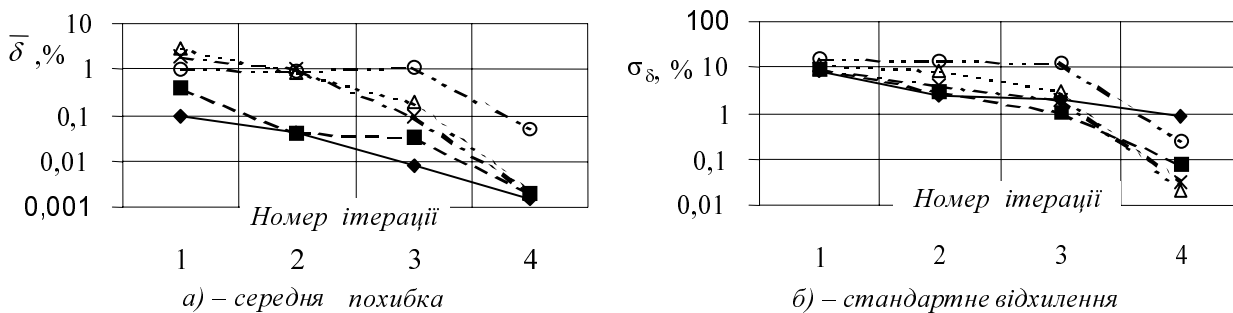


Рис. 6. Залежність характеристик похибки від номера ітерації

У результаті проведених нами числових досліджень встановлено, що загалом можна виділити три ситуації. Перша – малі немасштабні зміни провідності, при яких зведений половинний розмах не перевищує декількох відсотків (3-5%). В цьому випадку ітераційний процес є швидкозбіжним і загалом відпадає потреба в регуляризації гесіана (звичайно, за умови, що його ступінь зумовленості не занадто виходить за критичну межу). Друга – великі немасштабні зміни провідності, при яких значення зведеного половинного розмаху досягають понад декілька десятків відсотків (>30-50% і більше). Тут заходи щодо регуляризації є обов'язковими вже з першої ітерації, причому тим сильніші, чим більший розмах, а в прикінцевих ітераціях ступінь регуляризації необхідно зменшувати. І, нарешті, третя – середні зміни провідності. В цьому випадку адаптований регуляризаційний параметр доцільно вводити лише на перших ітераціях.

Модельні дослідження показали, що ітераційна процедура збігається за 4-5 ітерацій з допустимою масимальною відносною похибкою в 1% і досягається при таких значеннях коефіцієнта: $R(i) = R_0 \cdot (10)^{-(i-1)^2}$, тобто при $R(1)=1000$, $R(2)=100$, $R(3)=0.01$, $R(4)=R(5)=\dots=0$ (де R_0 – перевищення ступеня зумовленості над допустимим значенням $10^{p/2} = 10^8$). Тобто, вже на четвертій та наступних ітераціях регуляризацію можна не використовувати. Результати перших чотирьох ітерацій відтворення провідності елементів моделей 3 і 4 наведено на рис. 4,5, а характеристики похибок відтворення провідності для всіх моделей – на рис. 6.

1. Dickin F.J., Zhao X.J., Abdulach M.Z. and others. *Tomographic Imaging of Industrial Process Equipment Using Electrical Impedance Sensors // Sensors VI: Technology, Systems and Applications. Proceedings of the 5-th Conference on Sensors and their Applications. Bristol, Philadelphia and New York, 1991, P.215-220.*
2. Lidgley F.J., Zhu O.S., McLeod C.N., Brecon W.R. *Electrode Current Determination from Programmable Voltage Sources // Electrical Impedance Tomography. Clinical Physics and Physiological Measurement. Vol.13, Suppl.A, 1992, P.43-46.*
3. Dorozhovets M., Stadnyk B, Zavgorodny V., Kowalczyk A *Electrical Impedance Tomography System Based on Equipotential Electrodes // Proceedings of the XV Symposium Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits. Liege, Belgium, 1998. P.269-271.*
4. Дорожовець М.М. Томографія електричної провідності з еквіпотенціальною схемою вимірювальних електродів // *Вимірювальна техніка та метрологія. Львів, 1998. Вип.53. С.46-54.*
5. Дорожовець М.М. *Математичні проблеми реконструкції образів в технічній томографії // Вимірювальна техніка та метрологія. Львів, 1998. Вип.53, с.113-121.*
6. Дорожовець М.М., Федорчук А.А., Петровська І.Р. *Математичні засади прямої задачі томографії провідності // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. N324. С.43-51.*
7. Дудикевич Т.В. *Реконструкція розподілу питомої провідності для технічних та біомедичних вимірювальних систем. Автореф. дис. ... канд.техн. наук. Львів. 1997.*
8. Dennis J.E., Shnabel R.B. *Numerical method for unconstrained Optimisation in Nonlinear Equations. Prentice_Hall, Inc. Englewood Clifs. New Jersey, 1983.*
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некоректных задач. М., 1986.*
11. Лоусон Ч., Хенсон Р. *Численные методы решения задач методом наименьших квадратов. М., 1986.*