1. Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. 1977. С. 61–66. 2. Петричкович В. М. О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1987. Вып. 26. С. 13 - 16.

УДК 519. 21.

О. С. Гаврилів, Б. С. Остапович, Т. В. Іванел
Національний університет “Львівська політехніка” ; кафедра прикладної математики

ДО ПИТАННЯ СЛАБКИХ РОЗПОДІЛІВ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Сепарабельний гільбертів простір розбивається в декартів добуток гільбертових підпросторів, на кожному з яких запроваджуються ймовірнісні розподіли. Доводиться, що сукупний розподіл на вихідному гільбертовому просторі буде слабким розподілом специфічної конструкції.

Separable Hilberts area separates in decart multiplade Hilberts under-areas on each of them is possible distribution. It is proved that these devision on start Hilbert area will be weak distribution of spesific construction.

Розглянемо дійсний гільбертів сепарабельний простір H зі скалярним добутком $<\cdot,\cdot>$ та ортонормованим базисом $\{e_n\}$. Базис $\{e_n\}$ вважаємо безумовним [1].

Лема. Сепарабельний дійсний гільбертів простір можна розбити на декартів добуток l сепарабельних гільбертових просторів з базисами, об’єднання яких становить базис розбиваного простору.

Доведення. Розіб’ємо базис $\{e_n\}$ гільбертового простору H на підбазиси $\{e_{n_i}\}, i=\overline{1,l}$ і розглянемо лінійні оболонки послідовностей лінійно-незалежних елементів $\{e_{n_i}\}$, $i=\overline{1,l}$. Отже, ми визначили сукупність ортопроекторів P_i, $i=\overline{1,l}$, кожен з яких проектує на відповідну лінійну оболонку якогось $\{e_{n_i}\}$, $i=\overline{1,l}$.

Для скінченно-вимірних лінійних оболонок лема справджується очевидно.

Нехай $\{e_{n_k}\}$ і $\{e_{n_m}\}$ – сепарабельні підбазиси базису $\{e_n\}$. Тоді, $\forall\, x \in H$

$$P_k x = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\, e_{j_k}, P_m x = \sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}\, e_{j_m}, \tag{1}$$

Оскільки для $\{e_n\}$ виконується рівність Парсеваля, то для x, $|x|<\infty$ як для доданків суми $<x,x>=|x|^2$, тобто лему треба вважати доведеною і для випадку розбиття базису $\{e_n\}$ на зчисленні підбазиси.

Підпростори, які виникли, трактуємо як простори через те, що кожен з підбазисів $\{e_{n_i}\}$ є базисом відповідного підпростору, нанизаного на $\{e_{n_i}\} \cup \{0 \cdot e_s\}, e_s \notin \{e_{n_i}\}$ і кожному з цих підпросторів ізоморфно відповідає простір, нанизаний на $\{e_{n_i}\}$. Гільбертові підпростори $H_i, i = \overline{1, l}$ в цьому випадку – як замикання лінійної оболонки – відносно збігаються з лінійними оболонками $\{e_{n_i}\}$, скалярні добутки $< \cdot, \cdot >_i$ в кожному H_i запишуться як $< x, y >_i = < P_i x^*, P_i y^* >$, де x^*, y^* – довільні продовження $x, y \in H_i$ в простір H.

Теорема. Загальний вигляд слабкого розподілу в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H, для якого зберігається інваріантність міри в H, можна подати для відповідної циліндричної міри μ в H формулою

$$\mu = \prod_{i=1}^{l_1} \nu^*_{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{in_i}} \cdot \prod_{j=1}^{l_2} \mu^*_{t_j}\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots\right), \tag{2}$$

де $\mu^*_{t_j}\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots\right) = \mu_{t_j}\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots\right) \cdot \theta_H$, $\mu_{t_j}\left(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots\right)$ – гауссівська циліндрична міра в $H_j \subset H, j = \overline{1, l_2}$ зі зліченним базисом, θ_H – індикатор простору H (тобто, $\mu^*_{t_j}$ є мірою в H); $\nu^*_{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{in_i}} = \nu_{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{in_i}} \cdot \theta(H)$, $\nu_{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{in_i}}$ – борелівська міра в лінійній оболонці базисних елементів $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{in_i}$, $n_i < \infty$.

Доведення. Вираз (2) є стандартною продакт-мірою [2], оскільки співмножники є цілковито визначеними на H мірами.

Доведемо можливість оснащення кожного дійсного сепарабельного гільбертового простору H формою (2).

Розглянемо циліндричну міру δ на гільбертовому дійсному сепарабельному просторі H вигляду $\delta(E) = \delta_0(\chi E)$, де $\delta_0(\cdot)$ є довільна борелівська міра на кожному скінченновимірному R^n, $n = \dim PH$, P – ортопроектор, $E = \{x \in H; Px \in F\}$, де $F \subset R^n$, χ – ізоморфізм між PH і R^n.

Маємо внаслідок цього

$$\delta_0(\chi E) = \int_{\chi F} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

якщо $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – щільність розподілу в R^n.

Звідси, аналогічно [3], запроваджуємо міри

$$\nu_{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in_i}}(F) = \delta\left\{x \in H; \left(< x, e_{i1} >, < x, e_{i2} >, \ldots, < x, e_{in_i} >\right) \in F\right\}$$

для кожного i, тобто – вагою теореми Колмогорова [4] – в межах кожного i маємо узгоджену сім'ю мір, тому що кожна

$$\nu_{l_{ik}} = \int_{-\infty}^{x_k} \left(\int_{R^{n_i - 1}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n_i}\right) dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_{n_i} \right) dx_k$$

буде неспадною функцією.

Для різних $i = \overline{1, l_1}$ є допустимим $\delta(\cdot)$ брати неспадаючими.

На основі цього існують ймовірнісний простір (Ω_i, m_i) і випадкові значення $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{n_i i}$ такі, що $\forall n_i$

$$m_i\{\omega; (\xi_{1i}(\omega), \xi_{2i}(\omega), \ldots, \xi_{n_i i}(\omega)) \in \chi F\} = \nu_{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in_i}}(F) \tag{3}$$

Побудовані міри $\nu_{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in_i}}$ є інваріантними відносно зсувів та зчисленно-адитивними.

Для побудови мір $\mu_{t_j}(e_{j1}, e_{j2}, \ldots)$ скористаємося в кожному $H_j;\ j = \overline{1, l_2}$ гауссівськими циліндричними мірами з параметром t_j

$$\mu_{t_j}(E) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t_j}}\right)^{n_j} \int\limits_{\chi F_j} \ell^{-\frac{|x|_j^2}{2}}\, dx,\ t_j > 0,$$

де $E = \{x \in H_j; P_j x \in F_j\}; n_j = \dim P_j H_j$; P_j – ортопроектор в H_j, dx – міра Лебега в $\chi P_j H_j$; $|\cdot|_j$ – норма, породжена скалярним добутком $< \cdot, \cdot >_j$ в $H_j, F_j \subset P_j H_j$.

Тут міра μ_{t_j} є скінченно-адитивною.

Зчисленно-адитивну борелівську міру $\mu_{t_j}(e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jn_j})$ в кожному R^{n_i} визначимо за формулою

$$\begin{gathered}\mu_{t_j(e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jn_j})}(F_j) = \mu_{t_j}\{x \in H_j; (< x, e_{j1} >_j, < x, e_{21} >_j, \ldots \\ \ldots, < x, e_{jn_j} >_j \in \chi F_j\end{gathered} \tag{4}$$

що дає узгоджену сім'ю ймовірнісних мір. Отже, $\forall n_j < \infty$ існують ймовірнісний простір (Ω_j, m_j) і випадкові значення $\xi_{1j}, \xi_{2j}, \ldots, \xi_{n_j j}$ такі, що

$$m_j\{\omega; (\xi_{1j}(\omega), \xi_{2j}(\omega), \ldots, \xi_{n_j j}(\omega)) \in \chi F_j\} = \mu_{t_j(e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jn_j})}(F_j) \tag{5}$$

а, згідно з теоремою Тулча [5], вираз (5) залишається справедливим і для $n_j \to \infty,\ j = \overline{1, l_2}$.

Побудовані міри $\mu_{t_j(e_{j1}, e_{j2}, \ldots)}$ є інваріантними відносно повороту щодо гільбертового простору H_{jo}, вкладеного в вихідний простір H_j в межах абстрактного вінерівського простору (i_j, H_{jo}, H_j) [3].

Продакт-міра $\prod\limits_{j=1}^{l_2} \mu^*_{t_j(e_{j1}, e_{j2}, \ldots)}$ вкладається в схему кратного абстрактного вінерівського простору [6].

Спосіб конструювання згідно з формулою (2) міри μ в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі H є гарантією застереження інваріантності міри μ, яка залежно від структури має характер інваріантності зсувовий, обертальний, зсуво-обертальний.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Міра μ визначає відповідний слабкий розподіл в гільбертовому просторі H.

Доведення. Оскільки міра μ є циліндричною в H згідно з побудовою, на підставі присутності взаємооднозначної відповідності між слабкими розподілами і циліндричними мірами в H [3], то загальна форма слабкого розподілу в гільбертовому просторі є побудованою.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Ймовірнісний функціонал на дійсному сепарабельному гільбертовому просторі цілком визначається за допомогою формули (2).

Доведення. Розглянемо текст теореми та наслідку 1. Означення міри формулою (2) та зазначення відповідного слабкого розподілу надають змогу інтегруванням на цій мірі, ставити у відповідність цьому слабкому розподілу функціоналом

$$\Phi(f)=\int_H f(x)\mu(dx)$$

весь можливий спектр відповідних значень, що узгоджується з теоремою Рісса.

1. Мацак І. К. Слабка збіжність екстремальних значень незалежних випадкових елементів у банахових просторах з безумовним базисом // Укр. мат. журн. 1996. Т.48. №6. С.805-812. 2. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Т. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К., 1988. 3. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., 1979. 4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайних процессов. М., 1977. 5. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей М., 1969. 6. Гаврилів О. С., Козак П. П. Кратний абстрактний вінерівський інтеграл і його властивості // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1985. №2. С.36. 7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейних операторов в гильбертовом пространстве: В 2 т. Т.1. Х., 1977. 8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 9. Королюк В. С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., 1985. 10. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М., 1983. 11. Пич А. Операторные идеалы. М., 1982.

УДК 519.62

І.І.Кровіцький
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

НОВА МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ДІАГОНАЛЬНО-НЕЯВНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЖОРСТКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У роботі розглянуто нову методику побудови окремого класу числових методів розв'язування жорстких систем, яка є універсальною для методів довільного порядку точності.

New methodology for construction of the separate class of numerical methods to solve the stiff systems is proposed. It is universal for the methods of arbirary exactness order.