запишемо (5) у вигляді

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -B\vec{V}(t) + \vec{\Sigma}, \ t \ge 0, \tag{7}$$

де $\vec{\Sigma} = D^{-1/2}\bar{s}; \vec{V}(0) = D^{1/2}\bar{g} = \bar{g}^*$. (8)

Із (6) видно, що B також є додатно визначеною ермітовою матрицею. Існує взаємно-однозначна відповідність між векторами $\vec{U}(t)$ і $\vec{V}(t)$. Тому рівняння (7) стійке.

Матриця B постійна, тому розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову (8), має вигляд

$$\vec{V}(t) = e^{-tB}\bar{g}^* + (E - e^{-tB})B^{-1}\vec{\Sigma}, \ t \ge 0. \tag{9}$$

Розв'язку (9) еквівалентне співвідношення

$$\Delta\vec{V}(t) = e^{-\Delta tB}\vec{V}(t_0) + (E - e^{-\Delta tB})B^{-1}\vec{\Sigma}; \tag{10}$$

де $t_0 \ge 0$, $\Delta t \ge 0$, а матриця e^{-tB} визначається збіжним рядом

$$E - tB + \frac{1}{2!}t^2B^2 - \frac{1}{3!}t^3B^3 + \ldots \quad .$$

Існує зв'язок між добре відомими числовими методами для апроксимації рівняння (1) і неперервної в часі дискретно просторової апроксимації (7), яка записується за методом Кранка–Нікельсона

$$\frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t} = -\frac{B}{2}\left[\vec{V}(t_0 + \Delta t) + \vec{V}(t_0)\right] + \vec{\Sigma}.$$

Знайдені значення $\vec{V}(t_0 + \Delta t)$ виражаються через $\vec{V}(t_0)$ і $\vec{\Sigma}$

$$\vec{V}(t_0 + \Delta t) = (E + \frac{\Delta t}{2}B)^{-1}(E - \frac{\Delta t}{2}B)\vec{V}(t_0) + \Delta t(E + \frac{\Delta t}{2}B)^{-1}\vec{\Sigma}.$$

УДК 519.63

І.І. Лазурчак
Дрогобицький державний педагогічний університет

ПРО ОДИН СПОСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗДР ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розроблений алгоритм ефективної реалізації триточкової різницевої схеми під час розв'язування крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку у випадку періодичних крайових умов.

The algoritm of effective realizaton of the three-pointed remainders sheme by the solution of the boundary problem on eigen values for ordinary differential equations of the second order is worked out.

При знаходженні власних значень крайової задачі з періодичними умовами для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$y''(x)+[\lambda-q(x)]y(x)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$y(0)=y(1),\quad y'(0)=y'(1) \tag{1}$$

можна використати триточкову різницеву схему другого порядку апроксимації [1]. У ній другі похідні шуканої функції замінюються у внутрішнх вузлах рівномірної сітки $\omega_N=\left\{ih,\ i=\overline{0,N},\quad h=1/N\right\}$ центральними скінченними різницями

$$y_i''=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+O\left(h^2\right),\quad i=\overline{1,N-1},$$

а перші похідні на краях проміжку [0, 1] – відповідно право- і ліво-сторонніми скінченними різницями

$$y_0'=\frac{1}{2h}\left(-3y_0+4y_1-y_2\right)+O\left(h^2\right),$$
$$y_n'=\frac{1}{2h}\left(3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}\right)+O\left(h^2\right),$$

де прийняте позначення $y_i\equiv y(x_i)$.

У результаті приходимо до алгебраїчної задачі на власні значення, тобто до розв'язування характеристичного рівняння

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} \times & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \times & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \times & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \times & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \times & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}=0, \tag{2}$$

де головна діагональ містить шукані власні значення, над- та піддіагоналі – одиничні, а останній рядок, що відповідає другій періодичній крайовій умові, містить постійні величини . Отже, характеристичний визначник є многочлен (**N**–1)-го порядку. Розкладаючи його за останнім рядком до елемента $a_{N,N-1}$ отримуємо алгебраїчні доповнення, що є визначниками або трикутних, або майже тридіагональних матриць. При цьому в трикутних матрицях, в силу представлення (2), на головній діагоналі стоятимуть одиниці. Майже тридіагональні матриці своєю чергою розкладаються на строго тридіагональні матриці **(N-2)** та **(N-1)** порядків, в яких, крім цього, над- та піддіагональні елементи – одиниці. Алгебраїчне доповнення елемента a_{NN} одразу представляє собою визначник тридіагональної матриці **(N-1)**-го порядку. Враховуючи специфіку отриманих алгебраїчних доповнень, їх можна обчислити за один прохід при реалізації рекурентної формули для знаходження детермінанта найвищого порядку. Крім цього, наявність одиничних елементів дає можливість на одному кроці циклу уникнути двох арифметичних операцій множнення, визначники трикутних матриць прирівняти до одиниці, а в пам'яті ПЕОМ зберігати лише два вектори

$$\vec{a}=\left(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_{N-1}\right),\ \text{де}\quad \tilde{a}_i=a_{ii}=\left(\lambda-q_i\right)h^2-2,$$
$$\vec{b}=\left(4,-1,-1,4,-6\right).$$

Отже,

$$D(\lambda)=\sum_{i=1}^{5} b_i \tilde{A}_{N,I}, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{N,1} &= (-1)^{N+1} - A_{2,N-1},\\
\tilde{A}_{N,2} &= (-1)^{N}\tilde{a}_1 + A_{3,N-1},\\
\tilde{A}_{N,3} &= (-1)^{N}\tilde{a}_{N-1} + A_{1,N-3},\\
\tilde{A}_{N,4} &= (-1)^{N+1} - A_{1,N-2},\\
\tilde{A}_{N,5} &= A_{1,N-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут алгебраїчні доповнення $A_{i\,j}(i<j)$ мають вигляд

$$A_{i\,j}=\begin{vmatrix} \tilde{a}_i & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \tilde{a}_{i+1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_j \end{vmatrix}.$$

Як видно, для обчислення $A_{3,N-1}$ та $A_{2,N-1}$ доцільно застосовувати рекурентні формули типу «прогонки назад»

$$\begin{gathered}
\hat{\Delta}_k = \tilde{a}_{N-k}\hat{\Delta}_{k-1} - \hat{\Delta}_{k-2}, \qquad k=2,\dots,N-3,\\
\hat{\Delta}_1 = \tilde{a}_{N-1}, \quad \hat{\Delta}_0 = 1,\\
A_{3,N-1} = \hat{\Delta}_{N-3},\\
A_{2,N-1} = \tilde{a}_2\hat{\Delta}_{N-3} - \hat{\Delta}_{N-4},
\end{gathered} \tag{5}$$

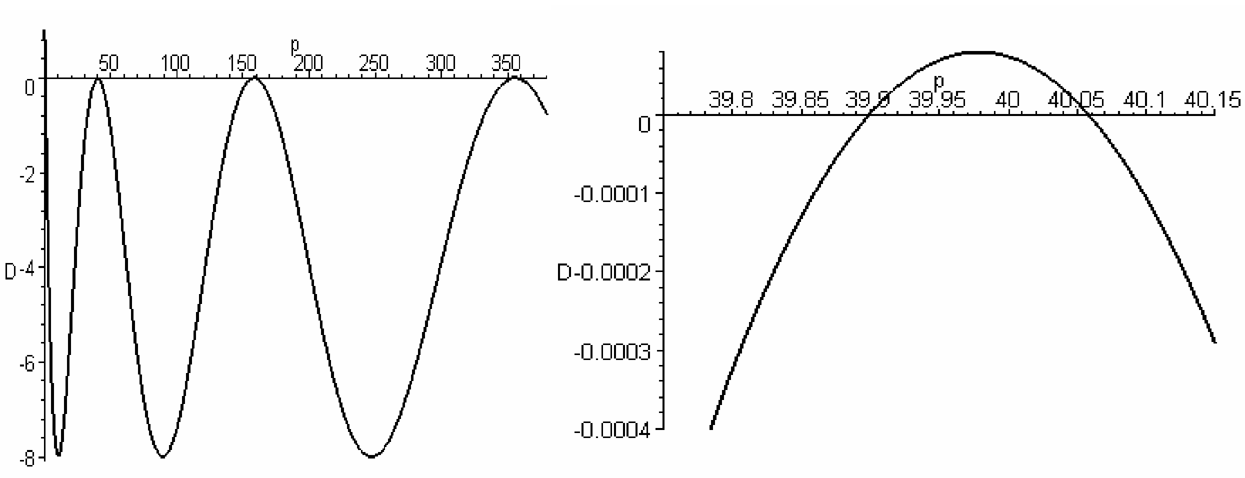
а для обчислення $A_{1,N-3}$, $A_{1,N-2}$, $A_{1,N-1}$, – рекурентні формули типу «прогонки вперед»

$$\begin{gathered}
\Delta_k = \tilde{a}_k\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}, \quad k=2,\dots,N-3,\\
\Delta_1 = \tilde{a}_1, \quad \Delta_0 = 1,\\
A_{1,N-3} = \Delta_{N-3},\\
A_{1,N-2} = \tilde{a}_{N-2}A_{N-3} - \Delta_{N-4},\\
A_{1,N-1} = \tilde{a}_{N-2}A_{N-2} - \Delta_{N-3}.
\end{gathered} \tag{6}$$

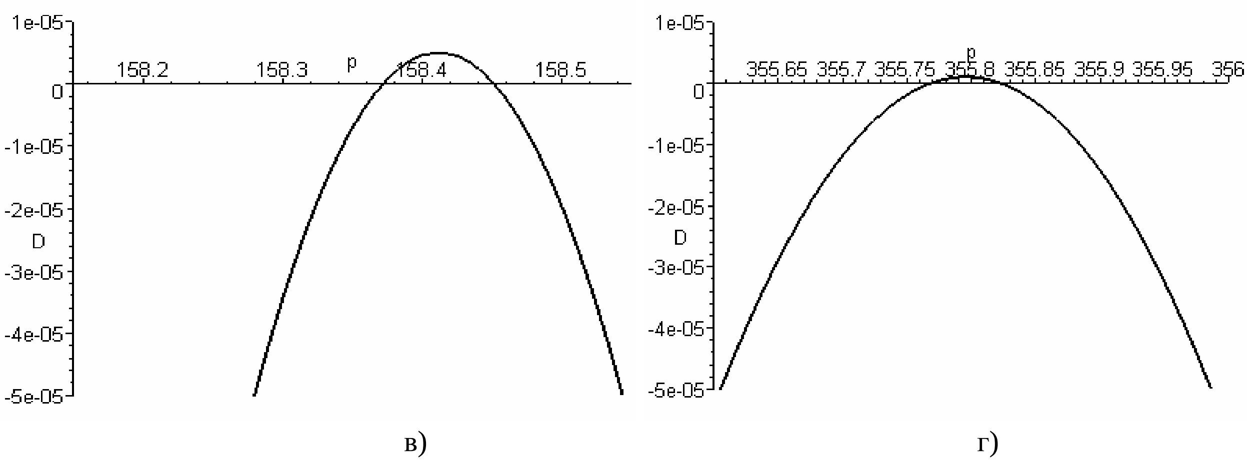
Як видно, обчислення визначників Δ_{N-3} та $\hat{\Delta}_{N-3}$ можна організувати в одному циклі, на кожному кроці якого будуть виконуватись лише по дві операції множення і віднімання. Звичайна ж схема обчислення п'яти визначників (N-3), (N-2), (N-1) порядків вимагала б на одному кроці 15=5*3 арифметичних операцій множення і 5 операцій віднімання. Зрозуміло, що запропонована схема суттєво зменшує процесорний час, обсяг оперативної пам'яті та похибку заокруглення.

Розрахункові формули (3)-(6) і подальше розв′язування алгебраїчного рівняння (2) (за допомогою стандартних процедур або ж методом бінарного поділу) реалізовані в системі символьної математики Maple V (R4/R5) при виборі $N=2^p$, (p=10,...,15), що дає можливість досягти необхідної точності результатів (для молодших власних значень до 10-12 правильних цифр). При цьому треба відзначити, що в системі Maple V [2] ні виділення коефіцієнтів полінома степені вище 1700 за допомогою процедури coeffs, ні його представлення в аналітичному вигляді за схемою Горнера не дають надійного та однозначного результату. Вирішити цю проблему вдається або циклічним вилученням коефіцієнтів многочлена і подальшим розбиттям його на множники, або ж через його числове представлення для фіксованого λ_n при застосуванні функції evalf. Завдяки можливості аналітичного представлення функції $D(\lambda_n)$ можна отримати її графічне зображення , що дає змогу достатньо просто локалізувати інтервали існування ізольованих коренів рівняння (2).

Тестову перевірку комплексу програм проводили на прикладі задачі (1) з $q(x) = x$. На рисунку зображено графіки залежності $D(\lambda_n)$ на окремих інтервалах при виборі різних масштабів, де чітко видно (б,в,г), що власні значення λ_n слідують парами і зближуються при $n \to \infty$.



а) б)



в) г)

Графіки функції $D(\lambda_n)$

У таблиці наведені числові розрахунки для молодших семи власних значень, отриманих при різних значеннях N розбиття сітки ω_N

Таблиця 1

Залежність власних значень $\lambda_n / 4\pi^2$ від розбиття сітки N

n	$N=2^{13}$	$N=2^{14}$	$N=2^{15}$
0	0.012629967821	0.012629967836	0.012629967834
1	1.010658650706	1.010658688037	1.010658697373
2	1.014690154445	1.014690190787	1.014690199630
3	4.011659588793	4.011660177751	4.011660325054
4	4.013675315223	4.013675901810	4.013676048520
5	9.011990705590	9.011993682972	9.011994427616
6	9.013334524590	9.013337498401	9.013338242175

Відзначимо, що наближені власні значення, отримані за допомогою функціонально-дискретного методу в [3], добре узгоджуються з наведеними в таблиці результатами.

Вказаний спосіб можна успішно застосувати для інших крайових задач з умовами Неймана, з власним параметром в одній із крайових умов тощо, наприклад

$$y'(0)=0, \quad y'(1)-\lambda y(1)=0.$$

Тоді, зокрема, характеристичний визначник в (2) набуває трикутного вигляду з одиничною наддіагоналлю, а вектор $\vec{b}$ в різницевій схемі матиме лише три ненульові елементи, останній з яких міститиме власний параметр.

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
2. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5. М., 1998.
3. Бандырский Б.И., Макаров В.Л., Уханёв О.Л. Достаточные условия сходимости неклассических асимптотических разложений для задачи Штурма-Лиувилля с периодическими условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, №3. С.45-60.

УДК 518:511.2

З.І.Крупка
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З РОЗГАЛУЖЕННЯМИ ВГОРУ–ВНИЗ

Одержано рекурентні формули для підхідних дробів ланцюгового дробу з розгалуженнями вгору-вниз.

Recurrent formulas for approximants of a continued fraction with branching up and down are obtained.