УДК 517.526

Ю.Р. Батюк, І.В. Мандзинець
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВО–РАЦІОНАЛЬНИМ МЕТОДОМ

Проведено дискретизацію параболічного рівняння, внаслідок якої одержано систему диференціальних рівнянь. Аналіз одержаної системи здійснюється матричними методами, а їх розв’язок представлено формулами Кранка–Нікельсона.

Quatization of parabolicequation is carried out, as a result of which a system of differential equations is obtained. The analysis of the obtained system is made using matrix methods and their solution is presented by Krank and Nickelson’s formulas.

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right) - \sigma(x)U(x,t) + s(x) \tag{1}$$

з однією просторовою змінною і крайовими умовами

$$U(x,0) = g(x), a < x < b,\ t > 0$$

$$\text{і } U(a,t) = \alpha,\ U(b,t) = \beta, \tag{2}$$

де $p(x)$, $\sigma(x)$, $s(x)$ і $g(x)$ задані неперервні функції на $a \le x \le b$, причому

$$p(x) > 0,\ \sigma(x) \ge 0. \tag{3}$$

Користуючись нерівномірною просторовою сіткою і центральною різницевою апроксимацією, проведемо дискретизацію рівняння (1)

$$\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\frac{dU_i(t)}{d(t)} = -\left[\frac{p(x_i + 1/2h_{i+1})}{h_{i+1}} + \frac{p(x_i - 1/2h_i)}{h_i} + \sigma_i \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right]U_i(t) + \\ + \frac{p(x_i + 1/2h_{i+1})}{h_i}U_{i+1}(t) + \frac{p(x_i - 1/2h_i)}{h_i}U_{i-1}(t) + \frac{h_i + h_{i+1}}{2}s_i, \tag{4}$$

де $1 \le i \le n$, $s_i = s(x_i)$, $\sigma_i = \sigma(x_i)$, $U_i(t) = U(x_i,t)$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Рівняння (4) визначає неперервну в часі та дискретну в просторі апроксимацію задачі (1) вздовж $U_i(0) = g_i$.

У матричному позначенні маємо

$$D\frac{d\vec{U}(t)}{d(t)} = -A\vec{U}(t) + s,\ t > 0 \tag{5}$$

$$\vec{U}_i(0) = \vec{g},$$

де матриця D – дійсна діагональна додатна розміру $n\times n$; A – дійсна симетрична додатно визначена тридіагональна матриця розмірів $n\times n$. Це слідує із (3) і (4).

Зауважимо, що граничні умови (2) входять неявно у вектор $\vec{s}$ із (5).

Нормалізуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (5). Нехай $D^{1/2}$ – додатна діагональна $n\times n$ матриця, квадрат якої дорівнює D.

Позначивши

$$\vec{V}(t) = D^{1/2}\vec{U}(t),\ D^{-1/2}AD^{-1/2}=B, \tag{6}$$

запишемо (5) у вигляді

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = -B\vec{V}(t) + \vec{\Sigma}, \ t \ge 0, \tag{7}$$

де $\vec{\Sigma} = D^{-1/2}\bar{s}; \vec{V}(0) = D^{1/2}\bar{g} = \bar{g}^*$. (8)

Із (6) видно, що B також є додатно визначеною ермітовою матрицею. Існує взаємно-однозначна відповідність між векторами $\vec{U}(t)$ і $\vec{V}(t)$. Тому рівняння (7) стійке.

Матриця B постійна, тому розв'язок рівняння (7), який задовольняє умову (8), має вигляд

$$\vec{V}(t) = e^{-tB}\bar{g}^* + (E - e^{-tB})B^{-1}\vec{\Sigma}, \ t \ge 0. \tag{9}$$

Розв'язку (9) еквівалентне співвідношення

$$\Delta\vec{V}(t) = e^{-\Delta tB}\vec{V}(t_0) + (E - e^{-\Delta tB})B^{-1}\vec{\Sigma}; \tag{10}$$

де $t_0 \ge 0$, $\Delta t \ge 0$, а матриця e^{-tB} визначається збіжним рядом

$$E - tB + \frac{1}{2!}t^2B^2 - \frac{1}{3!}t^3B^3 + \dots \quad .$$

Існує зв'язок між добре відомими числовими методами для апроксимації рівняння (1) і неперервної в часі дискретно просторової апроксимації (7), яка записується за методом Кранка–Нікельсона

$$\frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t} = -\frac{B}{2}\left[\vec{V}(t_0 + \Delta t) + \vec{V}(t_0)\right] + \vec{\Sigma}.$$

Знайдені значення $\vec{V}(t_0 + \Delta t)$ виражаються через $\vec{V}(t_0)$ і $\vec{\Sigma}$

$$\vec{V}(t_0 + \Delta t) = (E + \frac{\Delta t}{2}B)^{-1}(E - \frac{\Delta t}{2}B)\vec{V}(t_0) + \Delta t(E + \frac{\Delta t}{2}B)^{-1}\vec{\Sigma}.$$

УДК 519.63

І.І. Лазурчак
Дрогобицький державний педагогічний університет

ПРО ОДИН СПОСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗДР ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розроблений алгоритм ефективної реалізації триточкової різницевої схеми під час розв'язування крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку у випадку періодичних крайових умов.

The algoritm of effective realizaton of the three-pointed remainders sheme by the solution of the boundary problem on eigen values for ordinary differential equations of the second order is worked out.

При знаходженні власних значень крайової задачі з періодичними умовами для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку