1. Букашкин С.А., Кузиев Э.М. Синтез алгоритмов цифровых рекурсивных демодуляторов АМ- и ЧМ-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1989. № 12. С.34. 2. Ланнэ А.А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. Л., 1985. 3. Применение цифровой обработки сигналов/Под ред. Э. Оппенгейма. М., 1980. 4. Соловьева Е.Б. Метод синтеза цифровых нерекурсивных детекторов в частотной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1996. № 5. С.69. 5. Tymoshchuk P. and Shapovalov Yu. Synthesis of electronic devices on the determination and digitization of implicit algebra-differential equations base // Radioelectronics and Communications Systems. April 1998. Vol.41. P.41.

УДК 519.62

Р.В. Слоньовський, І.Є.Тесак
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

УЗАГАЛЬНЕНА АПРОКСИМАЦІЯ ПРОМІЖНИХ НАБЛИЖЕНЬ В ДРОБОВО - РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДАХ

У статті розглянуто забезпечення точності наближення комбінацій приростів тейлорівських розвинень при їх однокроковій апроксимації під час розв'язання систем диференціальних рівнянь другого порядку.

The question of accuracy of approximations of Taylor's expansion fortheir one – step approximation for finding the solution of second order systems of differential equations were investigated.

Реалізація дробово-раціональних наближень довільного p – го порядку узгодженості з однокроковою чи багатокроковою апроксимаціями приростів тейлорівських розвинень відносно біжучого вузла інтегрування при числовому дослідженні жорстких систем диференціальних рівнянь другого порядку здійснюється на основі рекурентної процедури, запропонованої для систем диференціальних рівнянь першого порядку в роботі [1] . Ця ідея була використана і з відповідною модифікацією застосована для розв'язання систем другого та вищих порядків.

Суттю цієї статті є дослідження забезпечення точності наближення відповідних комбінацій приростів тейлорівських розвинень для їх однокрокової апроксимації при знаходженні розв'язку систем диференціальних рівнянь другого порядку

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') \tag{1}$$

де $\mathbf{y} \in R^S$, $\mathbf{f} \in R^S$, $x \in [x_0, x_k]$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}'(x_0) = \mathbf{y}'_0$.

Після формального розширення такої системи одержуємо задачу вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_2, \\ \mathbf{z}'_2 = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \end{cases} \tag{2}$$

з початковими умовами

$$\mathbf{z}_1(x_0) = \mathbf{z}_{10} = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{z}_2(x_0) = \mathbf{z}_{20} = \mathbf{y}'_0, \quad \mathbf{z}_i \in R^S, i = 1,2 .$$

Розв'язок системи (2) будемо трактувати як двокомпонентний вектор-стовпець вигляду

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

де кожна компонента є своєю чергою вектором розмірності вихідної нерозширеної системи. Матриця Якобі системи (2) має відповідний вигляд

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}_2} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо структуру дробово-раціонального числового методу p – го порядку узгодженості розв'язання систем рівнянь вигляду (1) або (2)

$$\mathbf{z}_{n+1}^{[p]} = \mathbf{z}_n + \sum_{i=1}^{p} \frac{C_p^{p-i}\mathbf{A}_i}{(\mathbf{E} - a_p h \mathbf{J}_n)^i}, \tag{4}$$

де

$$\mathbf{A}_i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_i^j \mathbf{F}_{i-j,n}, \tag{5}$$

і $\mathbf{A}_i = \left(\mathbf{A}_{1,i}, \mathbf{A}_{2,i}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{F}_{k,n} = \left(\mathbf{F}_{1,k,n}, \mathbf{F}_{2,k,n}\right)^{\mathrm{T}}$ – двокомпонентні вектори, кожна з компонент яких теж є вектором розмірності *S*. Прирости тейлорівських розвинень $\mathbf{F}_{k,n}$ забезпечують відповідний порядок узгодженості методу за умови відповідної точності їх апроксимації лінійними однокроковими методами. Методика побудови таких однокрокових методів викладена в [2].

Розглянемо структуру векторів $\mathbf{A}_i$ різних порядків

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{F}_{1,n} = (h\mathbf{z}_1', h\mathbf{z}_2')_n^{\mathrm{T}} = h\mathbf{z}_n'.$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_2 = C_2^0 \mathbf{F}_{2,n} - C_2^1 \mathbf{F}_{1,n} = C_2^0 \left(h\mathbf{z}_n' + \frac{1}{2} h^2 \mathbf{z}_n'' \right) - C_2^1 h\mathbf{z}_n' = \frac{1}{2} h^2 \mathbf{z}_n'' - h\mathbf{z}_n'; \\
\mathbf{A}_3 = C_3^0 \mathbf{F}_{3,n} - C_3^1 \mathbf{F}_{2,n} + C_3^2 \mathbf{F}_{1,n} = C_3^0 \frac{h^3 \mathbf{z}_n'''}{3!} + \left(C_3^0 - C_3^1\right) \frac{h^2 \mathbf{z}_n''}{2!} + \\
+ \left(C_3^0 - C_3^1 + C_3^2\right) h\mathbf{z}_n' = C_2^0 \frac{h^3 \mathbf{z}_n'''}{3!} - C_2^1 \frac{h^2 \mathbf{z}_n''}{2!} + C_2^2 h\mathbf{z}_n'; \\
\mathbf{A}_4 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i C_4^i \mathbf{F}_{4-i,n} = \frac{h^4 \mathbf{z}_n''''}{4!} + \left(C_4^0 - C_4^1\right) \frac{h^3 \mathbf{z}_n'''}{3!} + \left(C_4^0 - C_4^1 + C_4^2\right) \frac{h^2 \mathbf{z}_n''}{2!} + \\
+ \left(C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3\right) h\mathbf{z}_n' = C_3^0 \frac{h^4 \mathbf{z}_n''''}{4!} - C_3^1 \frac{h^3 \mathbf{z}_n'''}{3!} + C_3^2 \frac{h^2 \mathbf{z}_n''}{2!} - C_3^3 h\mathbf{z}_n';
\end{gathered} \tag{6}$$

отже, нескладно встановити вигляд такого вектора довільного порядку m

$$\mathbf{A}_m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i C_m^i \mathbf{F}_{m-i,n} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k C_m^k \frac{h^{m-i} \mathbf{z}_n^{(m-i)}}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i C_m^i \frac{h^{m-i} \mathbf{z}_n^{(m-i)}}{(m-i)!}, \tag{7}$$

де внутрішня сума знакопочергового числа комбінацій подана через конкретне значення, одержане методом математичної індукції. Зазначимо, що кожен вектор $\mathbf{z}_n^{(j)}$ згідно з (3) має вигляд

$$\mathbf{z}_n^{(j)} = \left(\mathbf{z}_{1,n}^{(j)}, \mathbf{z}_{2,n}^{(j)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{z}_{1,n}^{(j)}, \mathbf{z}_{1,n}^{(j+1)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Апроксимаційні коефіцієнти для однокрокового наближення похідних будуємо згідно з твердженням [2] про порядок апроксимації другої похідної в поточному сітковому вузлі інтегрування у вигляді

$$\mathbf{k}_{li} = h\mathbf{f}\left(x_n + \alpha_i h,\ \mathbf{z}_{1,n+\alpha_i}^{[l]\Lambda},\ \mathbf{z}'^{[l]\Lambda}_{1,n+\alpha_i}\right) = h\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}(\alpha_i h)^k\ \mathbf{z}_{1,n}^{(k+2)} + O(h^{l+2}), \qquad (8)$$

де значення наближень розв'язків та їх перших похідних $\mathbf{z}_{1,n+\alpha_i}^{[l]\Lambda}$, $\mathbf{z}'^{[l]\Lambda}_{1,n+\alpha_i}$ лінійними однокроковими методами в сіткових вузлах інтегрування $x = x_n + \alpha_i h$ визначається згідно з методикою, викладеною в [2], [3].Отже, залежно від значення порядку точності вектора $\mathbf{A}_i$ береться така кількість коефіцієнтів $\mathbf{k}_{li}$, яка б забезпечила порядок необхідної точності апроксимації. Розглянемо деякі з них, включаючи апроксиманту другої похідної

$$\mathbf{k}_0 = h\mathbf{f}(x_n,\ \mathbf{z}_{1,n},\ \mathbf{z}'_{1,n}) = h\,\mathbf{z}''_{1,n};$$

$$\mathbf{k}_{11} = h\mathbf{f}\left(x_n + h,\ \mathbf{z}_{1,n+1}^{[1]\Lambda},\ \mathbf{z}'^{[1]\Lambda}_{1,n+1}\right) = h\,\mathbf{z}''_{1,n} + h^2\,\mathbf{z}'''_{1,n} + O(h^3);$$

$$\mathbf{k}_{2i} = h\mathbf{f}\left(x_n + \alpha_i h,\ \mathbf{z}_{1,n+\alpha_i}^{[2]\Lambda},\ \mathbf{z}'^{[2]\Lambda}_{1,n+\alpha_i}\right) = h\,\mathbf{z}''_{1,n} + h^2\alpha_i\,\mathbf{z}'''_{1,n} + \frac{h^3\alpha_i^2\mathbf{z}''''_{1,n}}{2} + O(h^4);$$

$$\mathbf{k}_{3i} = h\mathbf{f}\left(x_n + \alpha_i h,\ \mathbf{z}_{1,n+\alpha_i}^{[3]\Lambda},\ \mathbf{z}'^{[3]\Lambda}_{1,n+\alpha_i}\right) =$$

$$= h\,\mathbf{z}''_{1,n} + h^2\alpha_i\,\mathbf{z}'''_{1,n} + \frac{h^3\alpha_i^2\mathbf{z}''''_{1,n}}{2} + \frac{h^4\alpha_i^3\mathbf{z}_{1,n}^{(5)}}{3!} + O(h^5); \qquad (9)$$

$$\mathbf{k}_{li} = h\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}(\alpha_i h)^k\ \mathbf{z}_{1,n}^{(k+2)} + O(h^{l+2}), \qquad \left(i = \overline{1,l}\right), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad \alpha_i \in (0,1].$$

Значить, для апроксимації похідних другого та вищих порядків будемо використовувати лінійну комбінацію коефіцієнтів $\mathbf{k}_{li}$, вибираючи її параметри згідно з узгодженням порядку точності.

Запишемо структуру векторів $\mathbf{A}_i$, враховуючи зазначене вище

$$\mathbf{A}_1 = \left(\mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{A}_{2,1}\right)^{\mathrm{T}} = (h\mathbf{z}_{1,n},\ \mathbf{k}_0)^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{A}_2 = \left(\mathbf{A}_{1,2}, \mathbf{A}_{2,2}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{z}''_{1,n}\\ \mathbf{z}'''_{1,n}\end{pmatrix} - h\begin{pmatrix}\mathbf{z}'_{1,n}\\ \mathbf{z}''_{1,n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{h}{2}\mathbf{k}_0 - h\mathbf{z}'_{1,n}\\ \xi'_{02}\mathbf{k}_0 + \xi'_{12}\mathbf{k}_{11}\end{pmatrix};$$

Параметри лінійної комбінації другої компоненти вектора $\mathbf{A}_2$ задовольняють систему рівнянь, що має єдиний розв'язок, для забезпечення порядку апроксимації

$$\begin{cases}\xi'_{02} + \xi'_{12} = -1,\\ \xi'_{12} = \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Розглянемо вектор

$$\mathbf{A}_3 = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\,\frac{h^{3-i}}{(3-i)!}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_{1,n}^{(3-i)}\\ \mathbf{z}'^{(3-i)}_{1,n}\end{pmatrix}.$$

Запишемо кожну компоненту вказаного вектора, використовуючи подані в (9) коефіцієнти $\mathbf{k}_{11}$та $\mathbf{k}_0$ для однокрокової апроксимації першої компоненти, а $\mathbf{k}_{2i}$й $\mathbf{k}_0$ відповідно для другої:

$$\mathbf{A}_{1,3} = h\mathbf{z}'_{1,n} + h(\xi_{03}\mathbf{k}_0 + \xi_{13}\mathbf{k}_{11});$$

$$\mathbf{A}_{2,3} = \xi'_{03}\mathbf{k}_0 + \xi'_{13}\mathbf{k}_{21} + \xi'_{22}\mathbf{k}_{22}.$$

Узгоджуючи порядок апроксимації, одержимо дві системи рівнянь, кожна з яких має розв'язок, оскільки детермінантами таких систем є визначники Вандермонда

$$\begin{cases} \xi_{03} + \xi_{13} = -1, \\ \xi_{13} = \dfrac{1}{3!}. \end{cases},$$

$$\begin{cases} \xi'_{03} + \xi'_{13} + \xi'_{23} = 1, \\ \alpha_1\xi'_{13} + \alpha_2\xi'_{23} = -1, \\ \alpha_1^2\xi'_{13} + \alpha_2^2\xi'_{23} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Подібно до зазначеного вище кожна з компонент вектора $\mathbf{A}_4$ (6) буде апроксимована лінійними однокроковими методами з використанням відповідних коефіцієнтів, а відтак їх вигляд буде таким:

$$\mathbf{A}_{1,4} = -h\mathbf{z}'_{1,n} + h(\xi_{04}\mathbf{k}_0 + \xi_{14}\mathbf{k}_{21} + \xi_{24}\mathbf{k}_{22}).$$

Вектор $\mathbf{A}_{2,4}$ містить значення похідних від другого до п'ятого порядку, тому для його наближення необхідно використати вже інші коефіцієнти вигляду (9)

$$\mathbf{A}_{2,4} = \xi'_{04}\mathbf{k}_0 + \xi'_{14}\mathbf{k}_{31} + \xi'_{24}\mathbf{k}_{32} + \xi'_{34}\mathbf{k}_{33}.$$

Для визначення параметрів ξ_{i4} та ξ'_{i4} підставляємо значення $\mathbf{k}_{li}$ та прирівнюємо відповідні вирази, а відтак маємо знову дві системи рівнянь, з головним визначником, відмінним від нуля, оскільки $\alpha_i \neq \alpha_j$

$$\begin{cases} \xi_{04} + \xi_{14} + \xi_{24} = \dfrac{C_3^2}{2}, \\ \alpha_1\xi_{14} + \alpha_2\xi_{24} = -\dfrac{C_3^1}{2\cdot 3}, \\ \alpha_1^2\xi_{43} + \alpha_2^2\xi_{24} = \dfrac{C_3^0}{3\cdot 4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi'_{04} + \xi'_{14} + \xi'_{24} + \xi'_{34} = -C_3^3, \\ \alpha_1\xi'_{14} + \alpha_2\xi'_{24} + \alpha_3\xi'_{34} = \dfrac{C_3^2}{2}, \\ \alpha_1^2\xi'_{14} + \alpha_2^2\xi'_{24} + \alpha_2^3\xi'_{34} = -\dfrac{C_3^1}{3}, \\ \alpha_1^3\xi'_{14} + \alpha_2^3\xi'_{24} + \alpha_3^3\xi'_{34} = \dfrac{C_3^0}{4}. \end{cases}$$

Вказану методику визначення приростів тейлорівських наближень для забезпечення точності апроксимації відповідного порядку можна застосувати аналогічно й для дробово – раціональних методів довільного порядку ***p*** при його реалізації рекурентною процедурою

[1]. Тоді кожна з компонент вектора $\mathbf{A}_i$ $\left(i=\overline{1,p}\right)$ для забезпечення відповідного порядку точності $O(h^{i+1})$ визначатиметься такими співвідношеннями:

$$\mathbf{A}_{1,i}=(-1)^{i+1}h\mathbf{z}'_{1,n}+h\sum_{j=0}^{i-2}\xi_{ji}\mathbf{k}_{j,i-2}\,; \tag{10}$$

$$\mathbf{A}_{2,i}=\sum_{j=0}^{i-1}\xi'_{ji}\mathbf{k}_{j,i-1}\ \text{,де}\quad \mathbf{k}_{0i}=\mathbf{k}_0\,; \tag{11}$$

а параметри ξ_{ji} та ξ'_{ji} визначаються з відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{i-2}\xi_{ji}=(-1)^{i-2}\dfrac{C_{i-1}^{i-2}}{2},\\ \sum\limits_{j=1}^{i-2}\xi_{ji}\alpha_j=(-1)^{i-3}\dfrac{C_i^{i-3}}{2\cdot 3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \sum\limits_{j=1}^{i-2}\xi_{ji}\alpha_j^{i-3}=-\dfrac{C_{i-1}^{1}}{(i-2)(i-1)},\\ \sum\limits_{j=1}^{i-2}\xi_{ji}\alpha_j^{i-2}=\dfrac{C_i^{0}}{(i-1)i}\end{cases}\qquad \left(i=\overline{1,p}\right), \tag{12}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\xi'_{ji}=(-1)^{i-1}C_{i-1}^{i-1},\\ \sum\limits_{j=1}^{i-1}\xi'_{ji}\alpha_j=(-1)^{i-2}\dfrac{C_{i-1}^{i-2}}{2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \sum\limits_{j=1}^{i-1}\xi'_{ji}\alpha_j^{i-2}=-\dfrac{C_{i-1}^{1}}{i-1},\\ \sum\limits_{j=1}^{i-1}\xi'_{ji}\alpha_j^{i-1}=\dfrac{C_{i-1}^{0}}{i}.\end{cases}\qquad \left(i=\overline{1,p}\right), \tag{13}$$

що мають, як слідує зі структури головного детермінанта системи, єдиний розв'язок при кожному конкретному наборі значень параметрів α_j, $(j=\overline{1,i})$.

Розглянутий підхід дає змогу забезпечити потрібний порядок апроксимації відповідних коефіцієнтів $\mathbf{A}_i$ при числовому дослідженні жорстких систем диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Чисельні методи розв'язку жорстких систем диференціальних рівнянь: Метод. Вказівки до курсу "Математичне моделювання" для аспірантів технічних спеціальностей / Уклад.: Р.В.Слоньовський, Т.М.Яремко. Львів, 1990. 2. Тесак І.Є. Лінійні однокрокові чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку //Праці міжнародної конференції "Питання оптимізації обчислень".6-8 жовтня. 1997. Київ. С.300-302. 3. Слоньовський Р.В. Однокрокові дробово–раціональні чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1996. №299. С.154-158.