де відносна корисна енергія, спожита енергія, втрати енергії, а також відносний час перехідного процесу відповідно визначаються так:

$$N_{к*}=\frac{N_к}{E_н I_н T_м}=\frac{N_к}{J\omega_н^2}; \quad N_{c*}=\frac{N_c}{E_н I_н T_м}=\frac{N_c}{J\omega_н^2}; \quad \Delta N_*=\frac{\Delta N}{E_н I_н T_м}=\frac{\Delta N}{J\omega_н^2}; \quad \tau_{п.п.}=\frac{t_{п.п.}}{T_м}. \quad (19)$$

У рівняннях (19) добуток $J\omega_н^2=I_н E_н T_м$ фактично визначає роботу, виконану двигуном, що працює в номінальному режимі протягом часу $T_м$.

Аналізуючи перехідні режими в ПЕ (зокрема в електроприводах), обов’язково слід наголосити, що енергетичні втрати в динаміці є набагато більшими порівняно з втратами в стаціонарних режимах (за такий самий час). Це відповідає принципові мінімуму Пригожина [6], згідно з яким швидкість виробництва ентропії в нестаціонарному процесі зменшується протягом її прямування до стаціонарного стану, в якому ця швидкість досягає мінімуму.

Висновки. 1. Побудована у відносних одиницях і зображеннях Лапласа математична модель динамічної системи – електропривода постійного струму як ТД ПЕ.

2. Проаналізовано основні характеристики і показники досліджуваного ПЕ в перехідних процесах з погляду ТД НП.

1. Щур І.З. Застосування підходів нерівноважної термодинаміки для аналізу енергетичної ефективності електроприводів постійного струму // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2002. – № 452. 2. Щур І.З., Костинюк Л.Д., Когут А.Р. Електропривід за системою “джерело струму – двигун постійного струму” як термодинамічний перетворювач енергії // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2003. – № 479. 3. Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Общий курс электропривода. – М.: Энергоиздат, 1981. 4. Вестерхоф Х., ван Дам К. Термодинамика и регуляция превращений свободной энергии в биосистемах: Пер. с англ. – М., 1992. 5. Петров Ю.П. Оптимальное управление электроприводом. – Л.: Энергия, 1971. 6. Карпов В.Н., Щур И.З. Термодинамика оптических электротехнологий АПК. – СПб., 1996. 7. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. – М., 1953.

УДК 621.313.32

М. Коцюба, В. Горячко, М. Соколовський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ТЗЕ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ УЗЕМЛЮВАЧІВ НА ПІДСТАВІ ІНВАРІАНТНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Запропоновано методику розрахунку стаціонарного електричного поля уземлювачів на підставі застосування тривимірних інваріантних алгебричних аналогів диференційних операторів.

A technique for determination of distribution of stationary electric field of a ground by means of application of three-dimensional invariant algebraic analogies of differential operators has been offered.

Постановка проблеми. Для дослідження електромагнетних полів довільного походження було запропоновано апарат інваріантного наближення функцій [1]. Його було використано для обчислення плоских полів [2, 3]. Однак задача розрахунку уземлювачів є суттєво тривимірною.

Тому нами було поставлено завдання розширення застосувння апарата інваріантного наближення функцій на просторову задачу розрахунку стаціонарного електричного поля уземлювачів.

Аналіз останніх досліджень. У наявних польових моделях, побудованих на підставі апарата інваріантного наближення функцій [2, 3], автори обмежувались плоскою задачею. У [4] було запропоновано ідею застосування цього апарата до просторової задачі. Алгоритм побудови невироджених комплектів для розрахунку алгебричних аналогів диференційних операторів на підставі вектора Тейлора запропоновано в [5]. Актуальною залишається задача створення та програмної реалізації математичної моделі тривимірного поля викладеною в [1] методикою.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розширення застосування апарата інваріантного наближення функцій на просторову задачу розрахунку стаціонарного електричного поля уземлювачів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для формування математичної моделі розрахунку стаціонарного електричного поля уземлювача довільної форми приймемо такі допущення:

1. Провідність матеріалу уземлювача вважається нескінченно великою, тому електричне поле всередині уземлювача відсутнє, отож напруженість поля на поверхні уземлювача має тільки нормальну складову.
2. Провідність повітря вважається такою, що дорівнює нулю, тому на границі земля-повітря приймається гранична умова Неймана.
3. Провідність землі вважається сталою і незалежною від величини елекричного поля.
4. Область розрахунку поля обмежується поверхнею, розташованою на такій віддалі від уземлювача, що потенціал на ній можна прийняти таким, що дорівнює нулю.

За прийнятих допущень границя Γ області G розрахунку поля складається з трьох ділянок: ділянки Γ_Z, що збігається з поверхнею розділення земля-уземлювач; ділянки Γ_N, що збігається з поверхнею розділення земля-повітря; ділянки Γ_D, розташованій у землі, для якої приймається умова Діріхле ($\Gamma = \Gamma_Z \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$). Математична модель розглядуваної крайової задачі має вигляд

$$\Delta\varphi[\bar{r}] = 0; \qquad (\bar{r} \in G) \tag{1}$$

$$\bar{E} = -\mathrm{grad}\varphi; \qquad (\bar{r} \in G \cup \Gamma) \tag{2}$$

$$\bar{\delta}[\bar{r}] = \gamma\bar{E}[\bar{r}]; \qquad (\bar{r} \in G \cup \Gamma) \tag{3}$$

$$\oint\limits_{\Gamma_Z} \delta[\bar{r}]dS = I; \qquad (\bar{r} \in \Gamma_Z) \tag{4}$$

$$\varphi[\bar{r}] = \mathrm{const}; \qquad (\bar{r} \in \Gamma_Z) \tag{5}$$

$$\bar{n}[\bar{r}]\bar{E}[\bar{r}] = 0; \qquad (\bar{r} \in \Gamma_N) \tag{6}$$

$$\varphi[\bar{r}] = 0, \qquad (\bar{r} \in \Gamma_D) \tag{7}$$

де $\varphi[\bar{r}]$ – електричний потенціал як шукана скалярна функція радіуса-вектора $\bar{r}$ точки всередині області G та на її границі Γ; $\bar{E}[\bar{r}] = \bar{i}E_x + \bar{j}E_y + \bar{k}E_z$, $\bar{\delta}[\bar{r}] = \bar{i}\delta_x + \bar{j}\delta_y + \bar{k}\delta_z$ – вектор напруженості електричного поля та вектор густини електричного струму як шукані векторні функції радіуса-вектора $\bar{r}$ точки всередині області G та на її границі Γ; γ – питома провідність землі; $\bar{n}[\bar{r}] = \bar{i}n_x + \bar{j}n_y + \bar{k}n_z$ – одиничний вектор, перпендикулярний до границі в точці з радіусом-вектором $\bar{r}$; I – заданий струм уземлювача.

Накладемо на область розрахунку поля сітку, продовжимо її за межі області й побудуємо мінімальний описаний многогранник. Кожному зовнішньому вузлові поставимо у відповідність вузол на границі області. Нехай ми отримали M вузлів, серед яких K внутрішніх вузлів, Z граничних вузлів, що належать частині Γ_Z границі Γ; N граничних вузлів, що належать частині Γ_N границі Γ; D граничних вузлів, що належать частині Γ_D границі Γ (тобто, $M = K + Z + N + D$).

Поставимо у відповідність кожному m-му $(m=\overline{1,M})$ вузлові єдиний P- вузловий комплект n-го порядку (де $P=(n+3)!/(n!3!))$, як показано в [1]. Вважатимемо, що крок сітки є достатньо малим для того, щоб у межах комплекту подати шукані залежності відповідними многочленами Тейлора n-го степеня. Для кожного комплекту введемо подвійну нумерацію вузлів, в якій перша частина вказує номер базового вузла комплекту у сітковій інформації, а друга – локальний номер вузла в комплекті, і назвемо таку нумерацію локальною [2]. Згідно з теорією інваріантного наближення функцій [1] алгебричний аналог розглядуваної інтегро-диференційної крайової задачі можна записати у вигляді

$$\vec{R}_{\Delta m}\vec{\varphi}_m=0; \qquad (m=\overline{1,K}) \tag{8}$$

$$E_{xm}=-\vec{R}_{xm}\vec{\varphi}_m;\; E_{ym}=-\vec{R}_{ym}\vec{\varphi}_m;\; E_{zm}=-\vec{R}_{zm}\vec{\varphi}_m; \qquad (m=\overline{1,M}) \tag{9}$$

$$\delta_{xm}=\gamma E_{xm};\; \delta_{ym}=\gamma E_{ym};\; \delta_{zm}=\gamma E_{zm}; \qquad (m=\overline{1,M}) \tag{10}$$

$$\sum_{m=K+1}^{K+Z} a_m\delta_m=I; \tag{11}$$

$$\varphi_m=\varphi_{m+1}; \qquad (m=\overline{K+1,K+Z-1}) \tag{12}$$

$$E_{xm}n_{xm}+E_{ym}n_{ym}+E_{zm}n_{zm}=0; \qquad (m=\overline{K+Z+1,K+Z+N}) \tag{13}$$

$$\varphi_m=0, \qquad (m=\overline{K+Z+N+1,M}) \tag{14}$$

де $\vec{R}_{\Delta m},\vec{R}_{xm},\vec{R}_{ym},\vec{R}_{zm}$ – алгебричні аналоги лапласіана та похідних по осях Ox, Oy, Oz для m-го комплекту; $\vec{\varphi}_m=(\varphi_{m1},\ldots,\varphi_{mP})_t$, $\vec{E}_{xm}=(E_{xm1},\ldots,E_{xmP})_t$, $\vec{E}_{ym}=(E_{ym1},\ldots, E_{ymP})_t$, $\vec{E}_{zm}=(E_{zm1},\ldots,E_{zmP})_t$, $\vec{\delta}_{xm}=(\delta_{xm1},\ldots,\delta_{xmP})_t$, $\vec{\delta}_{ym}=(\delta_{ym1},\ldots,\delta_{ymP})_t$, $\vec{\delta}_{zm}= =(\delta_{zm1},\ldots,\delta_{zmP})_t$ – вузлові стовпці потенціалів, складових вектора напруженості та складових вектора густини струму для m-го комплекту відповідно; $a_m(m=\overline{K+1,K+M_Z})$ – коефіцієнти квадратурних формул інтегрування по поверхні уземлювача; $\delta_m=\sqrt{\delta_{xm}^2+\delta_{ym}^2+\delta_{zm}^2}$ $(m=\overline{K+1,K+Z})$ – значення густини струму на поверхні уземлювача.

Ми отримали систему $7\cdot M$ рівнянь, яку за допомогою підставлень та використання викладень [3] зведемо до системи M-D рівнянь відносно невідомих вузлових потенціалів:

$$\sum_{j=1}^{P} R_{\Delta m,j}\varphi_{mj}=0; \qquad (m=\overline{1,K}) \tag{15}$$

$$\sum_{m=K+1}^{K+Z} a_m\left(\left(\sum_{j=1}^{P}R_{xm,j}\varphi_{mj}\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{P}R_{ym,j}\varphi_{mj}\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{P}R_{zm,j}\varphi_{mj}\right)^2\right)^{1/2}+I/\gamma=0; \tag{16}$$

$$\varphi_m-\varphi_{m+1}=0; \qquad (m=\overline{K+1,K+Z-1}) \tag{17}$$

$$n_{xm}\sum_{j=1}^{P}R_{xm,j}\varphi_{mj}+n_{ym}\sum_{j=1}^{P}R_{ym,j}\varphi_{mj}+n_{zm}\sum_{j=1}^{P}R_{zm,j}\varphi_{mj}=0, \qquad (m=\overline{K+Z+1,M-D}) \tag{18}$$

де mj – подвійний номер вузла. Отримана система є нелінійною за рахунок нелінійності співвідношення (16). У запропонованій моделі для її розв’язання використано метод Ньютона.

Для підтвердження адекватності запропонованої моделі проведено математичний експеримент обчислення опору смугового уземлювача завдовжки l = 1.57 м, закопаного в грунті з провідністю $\gamma=10^{-4}$ См/см на глибину H = 0.5 м. Ділянку Γ_D границі вибрано у вигляді поверхні паралелепіпеда; ділянка Γ_N зображена прямокутною рамою. На область розрахунку накладено сітку з кроками h_x, h_y, h_z по осях декартової системи координат. Для побудови алгебричних аналогів (АА) диференційних операторів використано комплекти четвертого порядку; кількість вузлів у комплекті P=35. У межах комплекту потенціал апроксимується виразом

$$\begin{gathered}\varphi = u_1 + u_2 x + u_3 y + u_4 z + u_5 x^2/2! + u_6 xy + u_7 xz + u_8 y^2/2! + u_9 yz + u_{10} z^2/2! + \\ + u_{11} x^3/3! + u_{12} x^2 y/2! + u_{13} x^2 z/2! + u_{14} xy^2/2! + u_{15} xyz + u_{16} xz^2/2! + u_{17} y^3/3! + u_{18} y^2 z/2! + \\ + u_{19} yz^2/2! + u_{20} z^3/3! + u_{21} x^4/4! + u_{22} x^3 y/3! + u_{23} x^3 z/3! + u_{24} x^2 y^2/(2!2!) + u_{25} x^2 yz/2! + \\ + u_{26} x^2 z^2/(2!2!) + u_{27} xy^3/3! + u_{28} xy^2 z/2! + u_{29} xyz^2/2! + u_{30} xz^3/3! + u_{31} y^4/4! + u_{32} y^3 z/3! + \\ + u_{33} y^2 z^2/(2!2!) + u_{34} yz^3/3! + u_{35} z^4/4! \qquad (19)\end{gathered}$$

АА лапласіана має у цьому випадку похибку третього порядку і в локальній системі координат [3] обчислюється за формулою

$$\Delta\varphi = u_5 + u_8 + u_{10}. \qquad (20)$$

АА оператора Гамільтона має у цьому випадку похибку четвертого порядку і в локальній системі координат обчислюється згідно з

$$\overline{\nabla}\varphi = \bar{i}u_2 + \bar{j}u_3 + \bar{k}u_4. \qquad (21)$$

Формування комплектів здійснювалось за алгоритмом, викладеним в [5]. Для прикладу в таблиці наведено координати строго внутрішнього комплекту у локальній системі координат.

Координати вузлів строго внутрішнього комплекту

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	h_x	0	0	$-h_x$	h_x	h_x	0	0	0	$2h_x$
y	0	0	h_y	0	0	h_y	0	$-h_y$	h_y	0	0
z	0	0	0	h_z	0	0	h_z	0	h_z	$-h_z$	0
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$-h_x$	$-h_x$	h_x	h_x	h_x	0	0	0	0	$-2h_x$	$2h_x$	$2h_x$
h_y	0	$-h_y$	h_y	0	$2h_y$	$-h_y$	h_y	0	0	h_y	0
0	h_z	0	h_z	$-h_z$	0	h_z	$-h_z$	$2h_z$	0	0	h_z
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$-h_x$	$-h_x$	$-h_x$	h_x	h_x	h_x	h_x	0	0	0	0	0
$-h_y$	h_y	0	$2h_y$	$-h_y$	h_y	0	$-2h_y$	$2h_y$	$-h_y$	h_y	0
0	h_z	$-h_z$	0	h_z	$-h_z$	$2h_z$	0	h_z	$-h_z$	$2h_z$	$-2h_z$

Як бачимо, вузли не належать одній поверхні четвертого порядку, тобто матриця Тейлора [2] для такого комплекту є невиродженою.

Для строго внутрішнього регулярного комплекту четвертого порядку з $h_x = h_y = h_z = h$ отримано алгебричні аналоги лапласіана та оператора Гамільтона, схематично зображені на рис. 1, 2.

Аналітичне значення опору уземлювача отримано на підставі застосування методу електростатичної аналогії, методу дзеркальних відображень та методу середніх потенціалів. Згідно з методом електростатичної аналогії знайдемо спочатку ємність ізольованої смуги довжиною l, шириною 2b і товщиною 2c, зануреної в діелектрик з діелектричною проникністю ε таким чином, що її сторона шириною 2b паралельна поверхні діелектрика. Згідно з методом дзеркальних відображень заступна схема для розрахунку цієї ємності є небмеженим простором, заповненим діелектричною проникністю ε, в якому, окрім розглядуваної смуги, розташовано також її дзеркальне відображення на віддалі 2Н від неї. Декартову систему координат виберемо так, щоб вісь Ox збігалася з віссю уземлювача, а початок координат знаходився на його лівому торці. Тоді сторона смуги шириною 2b паралельна площині Oxz, а сторона шириною 2c паралельна площині Oxy. Згідно з методом середніх потенціалів ємність смуги розраховується за допущення, шо її заряд розподілено рівномірно по осі з лінійною густиною τ, а потенціал смуги приймається таким, що дорівнює його середньому значенню.

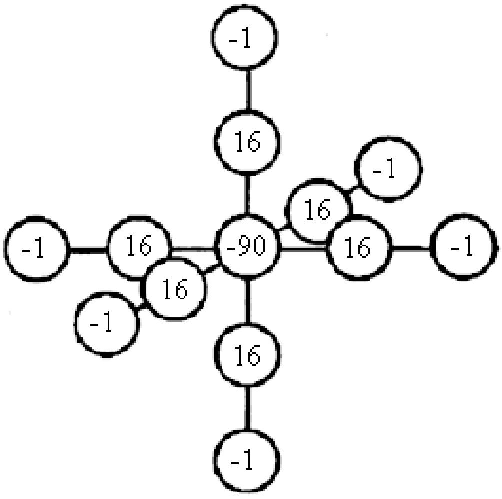

Рис. 1. Алгебричний аналог оператора $12h^2\Delta$

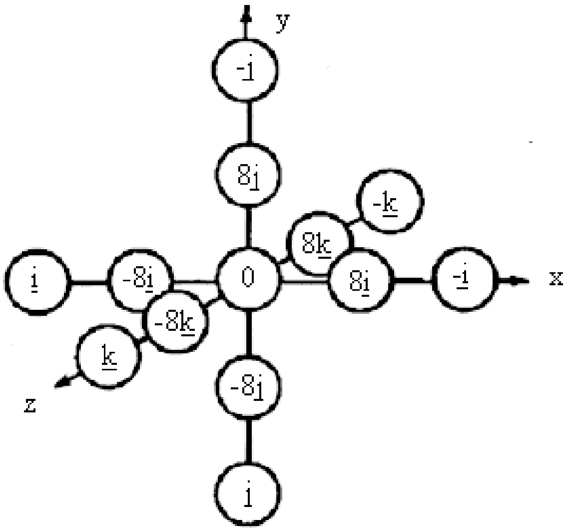

Рис. 2. Алгебричний аналог оператора $12h\overline{\nabla}$

Потенціал довільної точки смуги з координатами x_c, y_c, z_c записується у вигляді

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\int_0^l \left(1\Big/\sqrt{(x_c - x)^2 + y_c^2 + z_c^2} + 1\Big/\sqrt{(x_c - x)^2 + (y_c - 2H)^2 + z_c^2} \right) dx = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon} \times$$

$$\left(\operatorname{arcsh}\left(\frac{l - x_c}{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}} \right) - \operatorname{arcsh}\left(\frac{x_c}{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}} \right) + \operatorname{arcsh}\left(\frac{l - x_c}{\sqrt{(y_c - 2H)^2 + z_c^2}} \right) - \operatorname{arcsh}\left(\frac{x_c}{\sqrt{(y_c - 2H)^2 + z_c^2}} \right) \right)$$

Середній потенціал смуги обчислюється за формулою

$$\varphi_c = \left(\int_0^l dx_c \int_{-c}^{c} \varphi\big|_{z_c = b} dy_c + \int_0^l dx_c \int_{-c}^{c} \varphi\big|_{z_c = -b} dy_c + \int_0^l dx_c \int_{-b}^{b} \varphi\big|_{y_c = c} dz_c + \int_0^l dx_c \int_{-b}^{b} \varphi\big|_{y_c = -c} dz \right) /$$

$$(4bl + 4cl) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\left(2\int_{-c}^{c} dy_c \left(\sqrt{y_c^2 + b^2} - l\operatorname{arcsh}\frac{1}{\sqrt{y_c^2 + b^2}} + \sqrt{l^2 + y_c^2 + b^2} + \sqrt{(y_c - 2H)^2 + b^2} - \right.\right.$$

$$- l\operatorname{arcsh}\frac{1}{\sqrt{(y_c - 2H)^2 + b^2}} + \sqrt{l^2 + (y_c - 2H)^2 + b^2}) + 2\int_{-b}^{b} dz_c (\sqrt{c^2 + z_c^2} - l\operatorname{arcsh}\frac{1}{\sqrt{c^2 + z_c^2}} +$$

$$+ \sqrt{l^2 + c^2 + z_c^2}) + \int_{-b}^{b} dz_c (\sqrt{(c - 2H)^2 + z_c^2} - l\operatorname{arcsh}\frac{1}{\sqrt{(c - 2H)^2 + z_c^2}}) + \sqrt{l^2 + (c - 2H)^2 + z_c^2}) +$$

$$\left. + \int_{-b}^{b} dz_c (\sqrt{(c + 2H)^2 + z_c^2} - l\operatorname{arcsh}\frac{1}{\sqrt{(c + 2H)^2 + z_c^2}} + \sqrt{l^2 + (c + 2H)^2 + z_c^2} \right) / (4bl + 4cl). \quad (22)$$

Ємність смуги $C = \tau l / \varphi_c$. Опір смугового уземлювача $R = \varepsilon / (\gamma C)$.

Аналіз отриманих результатів планується викласти в частині 2 поданої статті.

Висновки. Запропоновано методику розрахунку стаціонарного електричного поля уземлювачів на підставі використання апарата інваріантного наближення функцій. Незважаючи на прийняте допущення про лінійність середовища, задача є нелінійною за рахунок інтегрування по поверхні уземлювача. Вперше отримано алгебричні аналоги лапласіана та оператора Гамільтона на регулярному комплекті четвертого порядку. Перевірка адекватності моделі виконується на підставі інтегральних параметрів. Модель можна використати для розрахунку уземлювачів довільної конфігурації.

1. Фільц Р.В. Дискретний аналог оператора Гамільтона // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1986. – Вип. 24. – С. 20–25. 2. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Расчёт методом конечных разностей плоских электростатических полей в областях сложной конфигурации // Теоретическая электротехника. – 1990. – Вип. 50. – С. 27–34. 3. Фільц Р.В., Коцюба М.В. Розв'язування методом скінченних різниць нелінійних задач магнетостатики на підставі теорії інваріантного наближення функцій // Теоретична електротехніка. – 1998. – Вип. 54. – С. 127–139. 4. Коцюба М.В. Застосування інваріантних наближень до розрахунку уземлювачів // Доп. 3-ї Міжнар. конф. "Математичне моделювання в електротехніці та енергетиці". – 1999. – С. 130–131. 5. Коцюба М.В., Фільц Р.В., Костів О.П. Розв'язування задачі оптимізації в лісовій галузі на основі теорії інваріантного наближення функцій // Лісове господарство, лісова, паперова та деревообробна промисловість. – 1991. – Вип. 22. – С. 101–105.

УДК 621.3.019 : 51.001.57

О.Ю. Лозинський, С.В. Щербовських
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра ЕАП

ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ ПЕРЕХОДУ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОГО ОБ'ЄКТА

Розглянуто проблему формування функцій переходу математичних моделей надійності електротехнічних об'єктів. Для математичної моделі об'єкта із загальним двократним заміщувальним резервом розглянута процедура визначення функцій переходу. Досліджено також питання ефективності такого підходу для розрахунку безвідмовності та готовності електротехнічних систем.

The paper is devoted to problem of mathematical reliability models of electro-technical items transition functions creating. Transition functions derivation for mathematical model of item with whole system standby double reserve is considered. The problem of this approach effectiveness for electro-technical system reliability and availability calculations is considered too.

Постановка проблеми. З метою підвищення адекватності розрахунків показників надійності електротехнічних об'єктів, пропонується в методі простору станів [1] замість аналізу відповідної однорідної моделі виконувати аналіз відповідної неоднорідної марківської моделі надійності. Такий підхід виправдовує себе тоді, коли характеристики випадкових процесів відмов та відновлення складових елементів об'єкта суттєво відрізняються від характеристик експоненціального закону