Зауваження. Як вже зазначалося, λ_1 насправді не конче мусить бути дійсним числом. Результати, наведені вище, можна розповсюдити на загальні класи рівнянь.

Зауваження 2. Якщо $|\lambda_1| > 1$ і справджуються умови теореми 3, то під час практичних обчислень для уникнення труднощів, зумовлених можливістю нагромадження похибок заокруглень, доцільно використовувати при кожному n або при деяких з них рівність (6) як контрольну.

1. Дудкин Л.М., Ершов Э.Б. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов // Плановое хозяйство. 1965. №5. С. 59-63. 2. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы.М., 1985. 3. Шувар Б.А. О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений. Львов. политехн. ин-т.-Львов, 1988.-11с.-Деп. в Укр. НИИНТИ 10.06.88, №1473-Ук 88 4. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. Львов. политехн. ин-т.-Львов, 1992.-21с.-Деп. в Укр НИИНТИ 15.01.92, № 43-Ук 92.

УДК 517.956.4

І.П. Мединський
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

ПРО АПРІОРНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Установлено апріорні оцінки розв'язків параболічних систем із слабким виродженням на початковій гіперплощині в спеціальних просторах Гельдера.

The a priori estimates of the solutions of parabolic systems with weak degenerations on the initial hyperplane in special Hölder spaces is established.

Дослідженню параболічних систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині присвячені праці [1,2,5-7]. В [1,2,6] побудована і досліджена фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші для таких систем. Властивості інтегралів типу похідних від об'ємного потенціалу вивчали в [8]. Тут ці результати застосовувані для встановлення апріорних оцінок розв'язків параболічних за Петровським систем рівнянь із слабким виродженням на початковій гіперплощині у просторах Гельдера. Одержані оцінки застосовуватимуться для встановлення коректної розв'язуваності лінійних систем, а також локальної розв'язуваності відповідних квазілінійних систем.

1. Використовуватимемо такі позначення: n, b, N – задані натуральні числа; T – задане додатне число; $\alpha, \beta : [0,T] \to [0,\infty)$ – неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$ для $t > 0$, β монотонно неспадна; $q \equiv 2b/(2b-1)$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H, \}$, $x \in R^n$ $H \subset [0,+\infty)$; C_N – сукупність усіх стовпців висоти N, елементами яких є комплексні

числа; $A(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$, $B(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$, $E^d(t,\tau)\equiv\exp\{dA(t,\tau)\}$, $E_c(t,\tau,x)\equiv$ $\equiv exp\left\{-c(B(t,\tau))^{1-q}|x|^q\right\}$, $E_c^d(t,\tau,x)\equiv E_c(t,\tau,x)E^d(t,\tau)$, $\Delta_t^{t'}f(t,\cdot)\equiv f(t,\cdot)-f(t',\cdot)$, $\Delta_x^{x'}f(\cdot,x)\equiv$ $\equiv f(\cdot,x)-f(\cdot,x')$, $\Delta_{t,x}^{t',x'}f(t,x,\cdot)\equiv f(t,x,\cdot)-f(t',x',\cdot)$; $t\le t'$, $\{x,x'\}\subset R^n$. I – одинична матриця порядку N; $p(t,x;t',x')\equiv\left((A(t',t))^{1/b}+|x-x'|^2\right)^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками (t,x) і (t',x'); η – характеристична функція проміжку $[0,\infty)$ $I_\nu(t_1,t_2,t_3)\equiv\int\limits_{t_1}^{t_2}(B(t_3,\tau))^{-\nu}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}$, $t_1\in[0,T)$, $\{t_2,t_3\}\subset(0,T]$, $\nu\in[0,1]$; $\Psi(t,x)\equiv exp\left\{k(t)|x|^q\right\}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, де $k(t)\equiv$ $\equiv c_0a\left(c_0^{2b-1}-(T-B(T,t))a^{2b-1}\right)^{1-q}$, $t\in[0,T]$, $c_0\in(0,c)$; $W(t)=\sup\limits_{x\in R^n}\sum\limits_{|k|\le 2b}\frac{\left|\partial_x^k u(t,x)\right|}{\Psi(t,x)}$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\left(\alpha(t)I\partial_t-\beta(t)\sum_{1\le|k|\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k-a_0(t,x)\right)u(t,x)=f(t,x),\qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{1}$$

Для коефіцієнтів системи (1) використовуватимемо такі умови.

1) a_k, $|k|\le 2b$, є такими, що вираз $I\partial_t-\sum\limits_{|k|\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k$ є рівномірно параболічним за Петровським в шарі $\Pi_{[0,T]}$;

2) коефіцієнти a_k, $|k|\le 2b$, обмежені в $\Pi_{[0,T]}$, задовольняють умову Гельдера з показником γ, $\gamma\in(0,1)$ за змінною $x\in R^n$ рівномірно відносно $t\in[0,T]$;

3) коефіцієнти a_k, $|k|=2b$, неперервні за змінною t на $[0,T]$ рівномірно відносно $x\in R^n$;

4) $\exists\, C>0\,\forall\, x\in R^n\ \forall\, k, |k|\le 2b: |a_k(t,x)-a_k(t',x')|\le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)}$, $0<t<t'\le T$;

5) $\exists\, M>0\ \forall t\in[0,T]: I_{1-\gamma_0/(2b)}(0,t,t)\le M$, $\gamma_0\in(0,1)$.

Під час виконання умов 1) – 3) в [1, 2] доведено існування ф.м.р. задачі Коші для системи (1) $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset R^n$, для якої правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le C(B(t,\tau))^{-(n+|k|)/(2b)}E_c^d(t,\tau,x-\xi), \tag{2}$$

$$\left|\Delta_x^{x'}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right|\le C|x-x'|^\gamma(B(t,\tau))^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)}\left(E_c^d(t,\tau,x-\xi)+E_c^d(t,\tau,x'-\xi)\right),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset R^n,\ |k|\le 2b, \tag{3}$$

з деякими сталими $C>0$, $c>0$, $d\in R$.

Якщо додатково виконується умова 4), то для ф.м.р. Z в [6] доведено правильність оцінок

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)-\partial_{x'}^k Z(t',x';\tau,\xi)\right|\le C\big(p(t',x';t,x)\big)^{\gamma}\big(B(t,\tau)\big)^{-(n+|k|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times\left(E_c^d(t,\tau,x-\xi)+E_c^d(t,\tau,x'-\xi)\right),\ 0<\tau<t\le t'\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset R^n,\ |k|\le 2b; \tag{4}$$

$$\left|\partial_x^k\int_{R^n} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right|\le CE^d(t,\tau)\big(B(t,\tau)\big)^{-(|k|-\gamma)/(2b)},0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset R^n,\ 0<|k|\le 2b; \tag{5}$$

$$\left|\partial_x^k\int_{R^n} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi-\partial_{x'}^k\int_{R^n} Z(t',x';\tau,\xi)d\xi\right|\le C\big(p(t',x';t,x)\big)^{\gamma}\big(B(t,\tau)\big)^{-|k|/(2b)}E^d(\tilde t,\tau),$$
$$0<t\le t'\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset R^n,\ 0<|k|\le 2b,\ \tilde t=t+\eta(d)(t'-t). \tag{6}$$

Інколи використовуватимемо ще таку умову:

6) Існують обмежені і неперервні за t похідні $\partial_x^k a_k$, $|k|\le 2b$, які задовольняють у шарі $\Pi_{(0,T]}$ умову Гельдера за змінною x із показником γ.

2. Означимо простори, які використовуватимуться надалі.

Для функції $f:\Pi_{[0,T]}\to C_N$ використаємо умови

F_1. f неперервна в $\Pi_{[0,T]}$;

F_2. $\exists C>0\ \forall t\in[0,T]: W_0[f;t]\equiv\sup\limits_{x\in R^n}\left(\dfrac{|f(t,x)|}{\Psi(t,x)}\right)\le C$;

F_3. f задовольняє в шарі $\Pi_{[0,T]}$ локальну умову Гельдера за x із показником $\lambda\in(0,1)$;

F_4. $\exists C>0\ \forall t\in(0,T]: \int\limits_0^t \big(B(t,\tau)\big)^{-1+\lambda/(2b)}W_0[f;\tau]\dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C$.

Аналогічні умови для функції $u:\Pi_{[0,T]}\to C_N$ позначатимемо U_i, $i\in\{1,2,3,4\}$. Ці умови одержуються з умов $F_1,\ldots,F_4$ заміною f на u.

На початкову функцію $\varphi:R^n\to C_N$ накладемо такі умови:

Ф₁. Функція φ є неперервною;

Ф₂. Існують неперервні похідні $\partial_x^k\varphi(x)$, $|k|\le 2b$, які задовольняють умову Гельдера за x із показником $\lambda\in(0,1)$;

Ф₃. $\exists C>0: \|\varphi\|^{2b+\lambda}\le C$,

де $$\|\varphi\|^{2b+\lambda}\equiv\sup_{x\in R^n}\left(\sum_{|k|\le 2b}\frac{|\partial_x^k\varphi(x)|}{\Psi(0,x)}\right)+\sup_{\substack{\{x,x'\}R^n\\ x\ne x'}}\left(\sum_{|k|\le 2b}\frac{|x-x'|^{-\lambda}\left|\Delta_x^{x'}\partial_x^k\varphi(x)\right|}{(\Psi(0,x)+\Psi(0,x'))}\right).$$

Позначатимемо такий клас функцій $C^{2b+\lambda}$.

Для заданого числа $\lambda\in(0,1)$ позначимо через $C^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $C^{\lambda,0}$ і $C^{0,0}$ простори неперервних функцій $u:\Pi_{[0,T]}\to C_N$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|u\|^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv \|u\|^{0,0} + [u]^{\lambda,\lambda/(2b)},\ \|u\|^{\lambda,0} \equiv \|u\|^{0,0} + [u]^{\lambda,0} \text{ і } \|u\|^{0,0},\ \text{де } \|u\|^{0,0} \equiv \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} \frac{|u(t,x)|}{\Psi(t,x)},$$

$$[u]^{\lambda,\lambda/(2b)} \equiv \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\ (t,x)\neq(t',x')}} \left(\left|\Delta_{t,x}^{t',x'} u(t,x)\right| \left(\Psi(t,x)+\Psi(t',x')\right)^{-1} \left(p(t,x;t',x')\right)^{-\lambda}\right),$$

$$[u]^{\lambda,0} \equiv \sup_{\substack{\{x,x'\}\subset R^n\\ x\neq x',t\in(0,T]}} \left(\left|\Delta_x^{x'} u(t,x)\right| \left(\Psi(t,x)+\Psi(t,x')\right)^{-1} |x-x'|^{-\lambda}\right).$$

За допомогою означених просторів уведемо простір $U^{\gamma,\lambda}$. Він складається з функцій $u\in C^{0,0}$, які мають похідні $\partial_x^k u(t,x) \equiv u^{(k)} \in C^{\gamma,\gamma/(2b)}$, $0<|k|<2b$, та похідні $u^{(k)}\in C^{\lambda,\lambda/(2b)}$, $|k|=2b$. Норма в просторі $U^{\gamma,\lambda}$, $\{\gamma,\lambda\}\subset[0,1]$ визначається за формулою

$$\|u\|_{V^{\gamma,\lambda}} \equiv \|u\|^{0,0} + \sum_{0<|k|<2b} \left\|u^{(k)}\right\|^{\gamma,\gamma/(2b)} + \sum_{|k|=2b} \left\|u^{(k)}\right\|^{\lambda,\lambda/(2b)}.$$

3. Наведемо властивості з [2], які використовуватимемо надалі.

Властивість 1. Нехай функція $u:\Pi_{[0,T]}\to C_N$ задовольняє умови U_1, U_2 і є в шарі $\Pi_{[0,T]}$ розв'язком системи (1), в якій функція f задовольняє умови F_1, F_2.

Якщо для коефіцієнтів системи, що розглядається, виконуються умови 1), 2), 3) і 6), то правильна формула

$$u(t,x) = \int_{R^n} Z(t,x;0,\xi)u(0,\xi)d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi, \quad 0<t\le T,\quad x\in R^n, \tag{7}$$

де Z – ф.м.р. задачі Коші для такої системи.

Властивість 2. Нехай для системи (1) виконуються умови 1), 2) і 3), а для функції f виконується серія умов F_i, $i\in\{1,3,4\}$.

Тоді для функції u, визначеної формулою

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{8}$$

правильне таке твердження:

Функція u має неперервні похідні, які входять у систему (1) і обчислюються за формулами

$$\partial_x^k u(t,x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ |k|<2b, \tag{9}$$

$$\partial_x^k u(t,x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\left(f(\tau,\xi)-f(\tau,x)\right)d\xi + \int_0^t \left(\partial_x^k \int_{R^n} Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right) \frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)} d\tau, \tag{10}$$

$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ \ |k|=2b.$

У випадку слабкого виродження для системи (1) розглядають [1] задачу Коші із звичайною початковою умовою

$$u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad x\in R^n, \tag{11}$$

За допомогою оцінок (2)-(6), властивості 2, за методикою з [8], доводиться властивість.

Властивість 3. Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови 1) – 4) з показником $\gamma \in (0,1)$, а умову 5) з показником $\gamma_0 < \gamma$. Тоді, якщо $f \in C^{\lambda,0}$, $\gamma_0 < \lambda < \gamma$ то функція u, визначена за формулою (8), належить до класу U^{γ,ζ_0} і правильна оцінка

$$\|u\|_{U^{\gamma_0,\zeta_0}} \le C\|f\|^{\lambda,0}, \quad \zeta_0 = \lambda - \gamma_0, \quad \gamma_0 = \min\{\gamma, 1-\gamma_0\}. \tag{12}$$

Теорема. Нехай коефіцієнти слабковироджененої системи (1) задовольняють умови 1) – 4) з деяким $\gamma \in (0,1)$, а умову 5) – з $\gamma_0 < \gamma$; функція $f \in C^{\lambda,0}$, $\varphi \in C^{2b+\lambda}$, де $\gamma_0 < \lambda \le \gamma < 1-\gamma_0$.

Тоді, якщо u – регулярний розв'язок задачі Коші (1), (11) з класу $U^{0,0}$, то $u \in U^{\gamma,\lambda-\gamma_0}$ і правильна оцінка

$$\|u\|_{U^{\gamma,\lambda}} \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right). \tag{13}$$

Доведення. Твердження теореми доводимо за методикою, запозиченою з праць [3,4]. Підставимо розв'язок u у систему (1) і запишемо отриману тотожність у вигляді

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t,y)\partial_x^k - a_0(t,y)\right)v(t,x) = f_1^{(y)}(t,x) + f_2^{(y)}(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{14}$$

де $v \equiv u - \varphi$,

$$f_1^{(y)}(t,x) \equiv f(t,x) + \beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t,y)\partial_x^k\varphi(x) + a_0(t,y)\varphi(x), \tag{14$_1$}$$

$$f_2^{(y)}(t,x) \equiv \beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b}\left(a_k(t,x) - a_k(t,y)\right)\partial_x^k u(t,x) + \left(a_0(t,x) - a_0(t,y)\right)u(t,x), \tag{14$_2$}$$

y – довільно фіксована точка R^n.

Оскільки коефіцієнти системи (14) не залежать від x і $v|_{t=0} = 0$, то на підставі властивості 1, маємо зображення для розв'язку u

$$u(t,x) = u_1(t,x;x) + u_2(t,x;x) + \varphi(x), \tag{15}$$

де

$$u_i(t,x,y) \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{R^n} G(t,x,\tau,\xi;y) f_i^{(y)}(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \quad y\in R^n, \ i\in\{1,2\}, \tag{16$_i$}$$

$G(t,x;\tau,\xi;y)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,y,\xi\}\subset R^n$ – ф.м.р. задачі Коші для системи

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t,y)\partial_x^k - a_0(t,y)\right)v(t,x) = 0,$$

а функції $f_i^{(y)}(t,x)$ визначаються за відповідною формулою (14$_i$), $i\in\{1,2\}$.

Зауважимо, що для ф.м.р. G правильні оцінки, які одержуються з оцінок (2) – (6) заміною Z на G.

Розглянемо докладніше властивості $u_i(t,x,y)$, $i \in \{1,2\}$. Оскільки функція $f_1^{(y)}(t,x)$ при довільному фіксованому $y \in R^n$ задовольняє умови властивості 2, то, застосувавши згадану властивість до u_1, одержимо

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}_x^k u_1(t,x;x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \bar{\partial}_x^k G(t,x;\tau,\xi;x) f_1^{(x)}(\tau,\xi)d\xi, \\ &(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad |k| < 2b; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}_x^k u_1(t,x;x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \bar{\partial}_x^k G(t,x;\tau,\xi;x)\left(f_1^{(x)}(\tau,\xi) - f_1^{(x)}(\tau,x)\right)d\xi + \\ &+ \int_0^t \left(\bar{\partial}_x^k \int_{R^n} G(t,x;\tau,\xi;x)\right) d\xi \, \frac{f_1^{(x)}(\tau,x)}{\alpha(\tau)} d\tau, \\ &(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad |k| = 2b, \end{aligned} \tag{18}$$

де риска над символом диференціювання означає диференціювання тільки за першим аргументом. Застосовувати властивість 2 до u_2 не можна, тому що f_2 не задовольняє умову Гельдера. Повторюючи оцінки, які проводились під час доведення властивості 3, доводимо правильність формули для похідних другого доданка з (15), обчислених в точці $y = x$.

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}_x^k u_2(t,x;x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \bar{\partial}_x^k G(t,x;\tau,\xi;x)\big(a_0(\tau,\xi) - a_0(\tau,x)\big)u(\tau,\xi) + \\ &+ \beta(\tau) \sum_{0<|k|\le 2b} \big(a_k(\tau,\xi) - a_k(\tau,x)\big)\partial_\xi^k u(\tau,\xi)d\xi, \quad |k| \le 2b. \end{aligned} \tag{19}$$

Проводячи звичайні оцінки із (15), (17), (18), (19), одержимо нерівність

$$w(t) \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right) + C\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} w(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}. \tag{20}$$

На підставі умови 5), маємо

$$\begin{aligned} &\int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} = \int_0^t (B(t,\tau))^{-1+\gamma_0/(2b)} (B(t,\tau))^{(\lambda-\gamma_0)/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le \\ &\le M\,(B(t,0))^{(\lambda-\gamma_0)/(2b)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Нехай $t_0 \in (0,T]$ таке число, що

$$CM\,(B(t_0,0))^{(\lambda-\gamma_0)/(2b)} < 1, \tag{22}$$

де C – стала з (20), а M - з (21). Тоді з нерівності (20) для $t \in (0,t_0]$, за допомогою (21), (22), одержимо

$$\sup_{t\in[0,t_0]} w(t) \le C_1\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right), \tag{23}$$

де $C_1 = C\left(1 - CM\,(B(t_0,0))^{(\lambda-\gamma_0)/(2b)}\right)^{-1}$.

У випадку $t > t_0$, з урахуванням (23), маємо

$$w(t) \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right) + C\int_0^{t_0} (B(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} \frac{w(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau + C\int_{t_0}^{t} (B(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} w(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le$$

$$\le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right) + C(B(t,t_0))^{-1+\lambda/(2b)} A(t_0,0) \sup_{t\in[0,t_0]} w(t) + C\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} \times$$

$$\times (\beta(\tau))^{-1+\lambda/(2b)} w(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C_2\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right) + C_3\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} w(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)},$$

де $C_2 = C\left(1 + C_1 (B(t,t_0))^{-1+\lambda/(2b)}\right) A(t_0,0)$, $C_3 = C(\beta(t_0))^{-1+\lambda/(2b)}$.

Звідси випливає така нерівність для $w(t)$:

$$w(t) \le a + b\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} w(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \tag{24}$$

де $a \equiv C_2\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|_{0,0}^{\lambda,0}\right)$, $b \equiv C_3$. Функція $w(t)$ мажорується розв'язком рівняння

$$v(t) = a + b\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} v(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}. \tag{25}$$

Рівняння (25) розв'язуємо методом послідовних наближень: $v_0 = a$;

$$v_1 = a + ab\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} = a\left(1 + \frac{b\Gamma(\lambda/(2b))(A(t,t_0))^{\lambda/(2b)}}{\Gamma(\lambda/(2b)+1)}\right);$$

$$v_2 = a + b\int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} v_1(\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} = a + ab\frac{\Gamma(\lambda/(2b))(A(t,t_0))^{\lambda/(2b)}}{\Gamma(\lambda/(2b)+1)} +$$

$$+ ab^2 \frac{\Gamma(\lambda/(2b))}{\Gamma(\lambda/(2b)+1)} \int_{t_0}^{t} (A(t,\tau))^{-1+\lambda/(2b)} (A(\tau,t_0))^{\lambda/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} =$$

$$= a\left(1 + \frac{b\Gamma(\lambda/(2b))(A(t,t_0))^{\lambda/(2b)}}{\Gamma(\lambda/(2b)+1)} + \frac{b^2(\Gamma(\lambda/(2b)))^2 (A(t,t_0))^{2\lambda/(2b)}}{\Gamma(2\lambda/(2b)+1)}\right).$$

За індукцією, для довільного $n \in N$, одержимо

$$v_n = a\sum_{k=0}^{n} (z_0)^{k\lambda/(2b)} / \Gamma(k\lambda/(2b)+1), \qquad z_0 \equiv \left(b\Gamma(\lambda/(2b))\right)^{2b/\lambda} A(y,y_0)).$$

Враховуючи те, що ряд $E_\nu(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\nu}}{\Gamma(n\nu+1)}$, $0 < \nu < 1$, збігається для всіх z, маємо

$$v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = aE_{\lambda/(2b)}(z_0), \tag{26}$$

де z_0 таке ж, як раніше.

Отже, з (23), (24) і (26) випливає, що

$$w(t) \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right), \qquad t \in [0,T]. \tag{27}$$

З нерівності (27) отримаємо оцінку

$$\|u\|_{U^{0,0}} \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right). \tag{28}$$

Перейдемо до оцінок сталих Гельдера доданків з (15). Функція $f_1^{(y)}(t,x)$, визначена за формулою (14_1) належить до класу $C_{0,0}^{\lambda,0}$, а тому, на підставі властивості 3 $u_1(t,x;x)$ належить до простору $U^{\gamma,\lambda-\gamma_0}$ і перший доданок має потрібну оцінку, як і третій доданок. Оцінимо прирости $\overline{\partial}_x^k u_2(t,x;x)$, $|k| \le 2b$. Зауважимо, що є правильною оцінка

$$\left|\overline{\partial}_x^k u_2(t,x;x)\right| \le C\Psi(t,x)(B(t,0))^{(2b-|k|+\gamma-\gamma_0)/(2b)}\|u\|_{U^{0,0}}, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \quad |k|\le 2b. \tag{29}$$

Нехай (t,x), (t',x') - довільно фіксовані точки шару $\Pi_{(0,T]}$. Коли $p^{2b} \ge B(t,0)$, то за допомогою (29) одержимо

$$\begin{aligned} \left|\Delta u_2^{(k)}\right| &\le \left|u_2^{(k)}(t,x;x)\right| + \left|u_2^{(k)}(t',x';x')\right| \le C\Psi(t,x)\|u\|_{U^{0,0}}(B(t,0))^{(2b-|k|+\gamma-\gamma_0)/(2b)} + \\ &+ C\Psi(t',x')\|u\|_{U^{0,0}}(B(t',0))^{(2b-|k|+\gamma-\gamma_0)/(2b)} \le C\|u\|_{U^{0,0}}P_{\zeta|k|}(\Psi(t,x)+\Psi(t',x')), \quad |k|\le 2b, \end{aligned} \tag{30}$$

де $P_{\zeta|k|} = p^{\gamma}$, якщо $|k| < 2b$ і $P_{\zeta|k|} = p^{\gamma-\gamma_0}$, якщо $|k| = 2b$.

У випадку $p^{2b} < B(t,0)$ маємо

$$\begin{aligned} \left|\Delta u_2^{(k)}\right| &\le \left|\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \overline{\partial}_x^k G(t,x;\tau,\xi;x) f_2^{(x)}(\tau,\xi)d\xi\right| + \\ &+ \left|\int_0^{t'} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \overline{\partial}_x^k G(t',x';\tau,\xi;x') f_2^{(x')}(\tau,\xi)d\xi\right| \equiv K_1 + K_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Інтеграли K_i, $i\in\{1,2\}$ оцінюються однаково. Оцінимо перший з них. За допомогою (2), припущень на коефіцієнти та апріорних припущень на розв'язок, одержимо

$$\begin{aligned} K_1 &\le C\|u\|_{U^{0,0}} \int_0^t (B(t,\tau))^{-|k|/(2b)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \left(E_{c-c_0-c_1}(t,\tau,x-\xi)(B(t,\tau))^{-n/(2b)}\right)\times \\ &\times \left(E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)\right)\left(|\xi-x|^{\gamma} E_{c_1}(t,\tau,x-\xi)\right)d\xi \le C\Psi(t,x)\|u\|_{U^{0,0}}P_{\zeta|k|}. \end{aligned} \tag{32}$$

Аналогічно для K_2 отримаємо оцінку

$$K_2 \le C\Psi(t',x')\|u\|_{U^{0,0}}P_{\zeta|k|}. \tag{33}$$

З (30) – (33) і (28) випливає, що $u_2 \in U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}$, де $\gamma < \lambda$ і правильна оцінка

$$\|u_2\|_{U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}} \le C\left(\|\varphi\|^{2b+\lambda} + \|f\|^{\lambda,0}\right). \tag{34}$$

Для випадку, коли $\lambda = \gamma$ використовуємо інше зображення розв'язку $u(t,x)$ системи (1). Подамо систему (1) у такому вигляді:

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{|k|=2b} a_k(\theta,y)\partial_x^k - a_0(\theta,y)\right)v(t,x) = F_1^{(\theta,y)}(t,x) + F_2^{(\theta,y)}(t,x), \tag{35}$$

де $v \equiv u - \varphi$,

$$F_1^{(\theta,y)}(t,x) \equiv f(t,x) + \beta(t) \sum_{0<|k|\le 2b-1} a_k(t,x)\partial_x^k u(t,x) + \beta(t) \sum_{0<|k|\le 2b} a_k(\theta,y)\partial_x^k \varphi(x) + \\ + a_0(\theta,y)\varphi(x), \qquad (35_1)$$

$$F_2^{(\theta,y)}(t,x) \equiv \beta(t) \sum_{|k|=2b} (a_k(t,x) - a_k(\theta,y))\partial_x^k u(t,x) + (a_0(t,x) - a_0(\theta,y))u(t,x), \qquad (35_2)$$

(θ, y) – довільно фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$.

Аналогічно, на підставі властивості 1, одержуємо зображення

$$u(t,x) = \varphi(x) + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y)\left(F_1^{(\theta,y)}(\tau,\xi) + F_2^{(\theta,y)}(\tau,\xi)\right)d\xi, \\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (36)$$

де $G_0(t,x;\tau,\xi;\theta,y)$ - ф.м.р. однорідної системи (35), а функції $F_1^{(\theta,y)}(t,x)$ і $F_2^{(\theta,y)}(t,x)$ визначаються за формулами відповідно (35_1) і (35_2).

Зауважимо [6], що для G_0 правильні оцінки (2) – (6) з довільним показником γ_1, а тому вважатимемо, що $\gamma_1 > \lambda = \gamma$. Як і раніше обгрунтовується можливість диференціювання (36), а також правильність зображення для похідних

$$\partial_x^k u(t,x) = \partial_x^k \varphi(x) + \partial_x^k \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} G_0(t,x;\tau,\xi,\theta,y) F_1^{(\theta,y)}(\tau,\xi)d\xi\Big|_{(\theta,y)=(t,x)} + \\ + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{R^n} \bar{\partial}_x^k G_0(t,x;\tau,\xi;t,x)\left(\beta(\tau) \sum_{|k|=2b} (a_k(\tau,\xi) - a_k(t,x))\partial_\xi^k u(\tau,\xi) + (a_0(\tau,\xi) - a_0(t,x)) \times \right. \\ \left. \times u(\tau,\xi)\right)d\xi, \quad |k| = 2b, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (37)$$

У зображенні (37) перші два доданки мають потрібну оцінку. Перший – за припущенням теореми, а другий – на підставі оцінок $\partial_x^k u(t,x)$, $|k| < 2b$, обмеженості коефіцієнтів системи та властивості 3. Раніше було доведено, що $u(t,x)$ належить до простору $U^{\gamma,\gamma-\gamma_0}$. Застосовуючи властивість 3 до третього доданка (37) з $\gamma = \gamma_1$ і $\lambda = \gamma - \gamma_0$, одержимо потрібну оцінку для випадку, коли $\lambda = \gamma$.

Доведення теореми завершено.

1. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. 1994. № 6. С. 7-11. 2. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. 1995. Чернівці, 51 с. Деп. в ДНТБ України 12.07.95, № 1808-Ук95. 3. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М., 1964. 4. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$ *- параболические системы // Тр. Семинара по функц. анализу. К., 1968. № 1. С. 3-175. 5. Мединський І.П. Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 337. С. 133-136. 6. Мединський І.П. Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням* *на початковій гіперплощині // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. 1999. № 364. С. 298-307. 7. Мединський І.П., Івасишен С.Д. Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. Ун-ту. Математика. 2000. Вип76. С. 45-50. 8. Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Математ. студії. 2000. Т.13. № 1. С. 33-46.*

УДК 539.377

В.І. Гавриш, В.О. Волос
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірів

РІВНЯННЯ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ ІЗ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

За допомогою методу, який грунтується на застосуванні узагальнених функцій, побудовано систему двох рівнянь термопружності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для смуги з прямокутним включенням та показано еквівалентність її системам рівнянь термопружності (система двох рівнянь для включення та смуги) та умовам ідеального механічного контакту на границях спряження.

System of two equations of thermal stresses with discontinuous and singular coefficients for strip with rectangular insertion was established using the method based on application of generalized functions. Have been proved equivalence of this system to the systems of thermal stresses equations (system of two equations for rectangular and strip) and to the requirements of ideal mechanical contact on boundaries of conjugation.

У роботі [1] отримано наближений аналітичний розв’язок стаціонарної задачі теплопровідності для ізотропної смуги із включенням прямокутної форми. Для визначення її напруженого стану у випадку плоскої динамічної задачі розглянемо рівняння руху в переміщеннях [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda^*(x,y)\cdot e^*-\beta^*(x,y)\theta\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)\cdot e_1^*\right]=\rho(x,y)\ddot{u},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)e_1^*\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu(x,y)\cdot\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\lambda^*(x,y)\cdot e^*-\beta^*(x,y)\theta\right]=\rho(x,y)\ddot{\mathrm{v}}, \quad (1)$$

де u,v – компоненти вектора переміщень;

$$\mu(x,y)=\frac{E(x,y)}{2[1+\vartheta(x,y)]};\quad \lambda^*(x,y)=\frac{E(x,y)\vartheta(x,y)}{1-\vartheta^2(x,y)};\quad \beta^*(x,y)=\frac{\alpha_t(x,y)E(x,y)}{1-\vartheta(x,y)};$$