так що

$$q(x_i,t) \ge \bar{q}(x_i,\xi_{l,i}) \ge 0, \quad t \in [t_{l-1},t_l], \quad l=1,\cdots,M.$$

Позначимо $\bar{A}_n = A_n^0 + \bar{A}_n^1(t)$ з

$\bar{A}_n^1(t) = diag(\bar{q}(x_1,t);\cdots,\bar{q}(x_n,t)),$ тоді

$$A_n(t) - \bar{A}_n(t) = diag(q(x_i,t) - \bar{q}(x_i,t))_{i=1,\dots,n} \succeq 0,$$

де знак $\succeq$ означає , що всі елементи матриці є негативні. Конус K складається з векторів з негативними компонентами з $L_p(0,T), \quad p \in [1,\infty).$ Використовуючи спектральну матричну норму, отримаємо

$$A_n(t) - \bar{A}_n(t) \preceq \left\| A_n(t) - \bar{A}_n(t) \right\| I \preceq qI,$$

$$q = \max_{1 \le i \le n} \max_{t \in [0,T]} \left[q(x_i,t) - \bar{q}(x_i,t) \right].$$

Матриця – $A_n(t)$ породжує монотонну напівгрупу для будь якого фіксованого $t \in [0,T].$ Відомо, що $e^{Bt} \succeq 0, \quad t \ge 0, \qquad (B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n)$ тоді і тільки тоді, якщо

$$b_{ij} \ge 0, \quad i \ne j, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

що є очевидним у нашому випадку.

При $f(t) \succeq 0, \quad u_0 \succeq 0, \quad qT \le 1$ за допомогою викладеного вище методу ми отримуємо двосторонню апроксимацію.

УДК 512.64

В.М. Прокіп
ІППММ НАН України ім. Я.С. Підстригача

РЕЗУЛЬТАНТНА МАТРИЦЯ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Встановлено певне узагальнення результантної матриці для многочленних матриць та вказано її застосування до знаходження спільних дільників многочленних матриць над комутативними кільцями.

Some generalization of the resultant matrix for polynomial matrices and its application to the investigation of the common divisors of polynomial matrices over commutative rings are found.

Нехай K – комутативне кільце з одиницею, відмінною від нуля. Введемо позначення: K_n і $K_n[x]$ – кільця $(n \times n)$-матриць над K і кільцем многочленів $K[x]$; I – одинична, а O – нульова матриці порядку n.

Кажуть, що матриці $A(x) \in K_n[x]$ та $B(x) \in K_n[x]$ мають спільний лівий дільник, якщо $A(x) = D(x)F(x)$ і $B(x) = D(x)G(x)$, де $D(x) \in K_n[x]$ і $\deg \det D(x) \ge 1$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$

називатимемо взаємно простими зліва, якщо їхніми спільними лівими дільниками є лише оборотні матриці.

Матрицям $A(x)$ та $B(x)$ із $K_n[x]$, які запишемо у вигляді

$$A(x) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p; \qquad B(x) = B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \ldots + B_q;$$

(A_i, $B_j \in K_n$, $i = 0,1,\ldots,p$; $j = 0,1,\ldots,q$; причому $A_0 \neq 0$ і $B_0 \neq 0$);

та цілому числу $r \geq 0$ поставимо у відповідність матриці

$$M_r(A,B) = \left\| \begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} A_0 & . & . & . \\ A_1 & A_0 & . & . \\ . & A_1 & . & . \\ . & . & . & A_0 \\ A_p & . & . & A_1 \\ . & A_p & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & A_{p-1} \end{matrix}}_{q+r} & \underbrace{\begin{matrix} B_0 & . & . & . \\ B_1 & B_0 & . & . \\ . & B_1 & . & . \\ . & . & . & B_0 \\ B_q & . & . & B_1 \\ . & B_q & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & B_{q-1} \end{matrix}}_{p+r} \end{matrix} \right\|,$$

$$N_r(A,B) = \left\| \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{q+r-1} \ A_p \ \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{p+r-1} \ B_q \right\|.$$

Матрицю $R_r(A,B) = \left\| \begin{matrix} M_r(A,B) \\ N_r(A,B) \end{matrix} \right\|$ називають результантною матрицею многочленних матриць $A(x)$ та $B(x)$. На незаповнених місцях в матрицях $M_r(A,B)$ знаходяться нулі. Відзначимо, що структуру результантної матриці многочленних матриць над полем досліджували в роботах [1-3]. На відміну від скалярного випадку ($n = 1$, [4]) результантна матриця многочленних матриць в загальному є прямокутною $n(p+q+r) \times (h+q+2r)n$ матрицею. Наша мета – в термінах рангів матриць $R_r(A,B)$ та $M_r(A,B)$ вказати умови, за яких матриці $A(x)$ та $B(x)$ є взаємно простими зліва, або мають спільний лівий унітальний дільник $D(x) = Ix - D$, $D \in K_n$.

Теорема 1. Нехай $D(x) = Ix - D$, $D \in K_n$ - спільний лівий дільник матриць $A(x)$ та $B(x)$ із $K_n[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$, $B(x) = D(x)G(x)$. Тоді $rangR_r(A,B) = rangR_{r+1}(F,G)$ для довільного цілого $r \geq 0$.

Доведення. Нехай $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Очевидно, що

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = (Ix - D)\left(A_0 x^{p-1} + F_1 x^{p-2} + \ldots + F_{p-1}\right),$$

$$B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \ldots + B_q = (Ix - D)\left(B_0 x^{q-1} + G_1 x^{q-2} + \ldots + G_{q-1}\right).$$

Неважко переконатись в тому, що для коефіцієнтів матриць $A(x)$ та $F(x)$ існують співвідношення: $\sum_{k=0}^{m} D^{m-k} A_k = F_m$, $m = 1,2,\ldots,p-1$; $\sum_{k=0}^{m} D^{p-k+t} A_k = 0$, $t = 0,1,\ldots,q+r-1$.

Аналогічно для коефіцієнтів матриць $B(x)$ та $G(x)$: $\sum_{k=0}^{m} D^{m-k} B_k = G_m$, $m = 1,2,...,q-1$ і $\sum_{k=0}^{m} D^{q-k+t} B_k = 0$, $t = 0,1,...,q+r-1$.

На підставі вищенаведеного отримуємо, що для оборотної матриці

$$T_r = \begin{Vmatrix} I & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ D & I & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ D^2 & D & I & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ D^{p+q+r-2} & D^{p+q+r-3} & ... & D^2 & D & I & 0 \\ D^{p+q+r-1} & D^{p+q+r-2} & ... & D^3 & D^2 & D & I \end{Vmatrix},$$

виконується рівність $T_r R_r(A,B) = \begin{Vmatrix} R_{r+1}(F,G) \\ O_1 \end{Vmatrix}$, де O_1 - нульова матриця розмірів $n \times (p+q+2r)n$. Отже, $rangR_r(A,B) = rangR_{r+1}(F,G)$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $D(x) = (Ix - D_1)(Ix - D_2)...(Ix - D_k)$; $D_j \in K_n$, $j = 1,2,...,k$ - спільний лівий дільник матриць $A(x)$ та $B(x)$ із $K_n[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$, $B(x) = D(x)G(x)$. Тоді $rangR_r(A,B) = rangR_{r+k}(F,G)$ для довільного цілого $r \geq 0$.

Наслідок 2. Нехай $D(x) = Ix - D$, $D \in K_n$, спільний лівий дільник матриць $A(x)$, $B(x) \in K_n(x)$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$, $B(x) = D(x)G(x)$. Тоді рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ розв'язне для всіх цілих $r \geq 0$.

Оскільки розв'язність рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ є необхідною умовою існування спільного лінійного дільника для матриць $A(x)$ та $B(x)$, то нижче вкажемо умови, за яких розв'язність цього рівняння буде і достатньою умовою його існування.

Лема 1. Для многочленних матриць $A(x)$ та $B(x)$ із $K_n[x]$, $(\deg A(x) = p, \ \deg B(x) = q)$, існує спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$ тоді і тільки тоді, коли:

А) рівняння $ZM_0(A,B) = N_0(A,B)$ розв'язуване;

Б) серед розв'язків цього рівняння існує розв'язок

$Z_0 = \begin{Vmatrix} D_{p+q-1} & D_{p+q-2} & ... & D_1 \end{Vmatrix}$, $D_j \in K_n$, такий, що $D_j = D_1^j$ для всіх $j = 1,2,...,\max(p,q)$.

Доведення. Необхідність випливає з наслідку 2.

Достатність. Нехай матриця $Z_0 = \begin{Vmatrix} D_{p+q-1} & D_{p+q-2} & ... & D_1 \end{Vmatrix}$, $D_j \in K_n$, $j = 1,2,..., p+q-1$ – такий розв'язок рівняння $ZM_0(A,B) = -N_0(A,B)$, що $D_j = D_1^j$ для всіх $j = 1,2,...,\max(p,q)$.

Легко бачити, що

$$D_1^p A_0 + D_1^{p-1} A_1 + ... + D_1 A_{p-1} + A_p = 0,$$

$$D_1^q B_0 + D_1^{q-1} B_1 + \ldots + D_1 B_{q-1} + B_q = 0.$$

На підставі узагальненої теореми Безу з останніх двох рівностей випливає, що $D(x) = Ix - D_1$ – спільний лівий дільник матриць $A(x)$ і $B(x)$. Лему доведено.

Надалі K – область цілісності.

Теорема 2. Нехай $A(x)$, $B(x) \in K_n[x]$, $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Якщо для деякого цілого числа $r \geq 0$ $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$ і рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ розв'язне, то для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$, $D_j \in K_n$, і він єдиний.

Доведення. Нехай матриця

$$Z_0 = \left\| D_{p+q+r-1} \quad D_{p+q+r-2} \quad \ldots \quad D_1 \right\|;\ D_j \in K_n,\ j = 1,2,\ldots, p+q+r-1;$$

розв'язок рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ для деякого цілого числа $r \geq 0$. Оскільки $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$, то матриця Z_0 – має єдиний розв'язок рівняння.

Нехай P – поле таке, що $K \subseteq P$. Оскільки $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$, то легко бачити, що $rang\left\| A_0 \quad B_0 \right\| = n$ і $rangR_r(A,B) = (p+q+r-1)n$. Розглянемо матрицю $R_{r+1}(A,B)$. Оскільки $R_r(A,B)$ – підматриця матриці $R_{r+1}(A,B)$, то неважко переконатись в тому, що

$$rangR_r(A,B) = rangM_{r+1}(A,B) = (p+q+r)n.$$

Отже, рівняння $YM_{r+1}(A,B) = -N_{r+1}(A,B)$ розв'язне над P і має єдиний розв'язок. Нехай матриця $Y_0 = \left\| Q_{p+q+r} \quad Q_{p+q+r-1} \quad \ldots \quad Q_1 \right\|$; $Q_j \in K_n$, $j = 1,2,\ldots, p+q+r$ цього рівняння. Тоді для матриць $M_r(A,B)$ і $N_r(A,B)$ мають місце співвідношення

$$Z_0 M_r(A,B) = -N_r(A,B) \text{ і}$$

$$\left\| Q_{p+q+r-1} \quad Q_{p+q+r-2} \quad \ldots \quad Q_1 \right\| M_r(A,B) = -N_r(A,B).$$

Оскільки Z_0 – єдиний розв'язок рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$, то $Z_0 = \left\| Q_{p+q+r-1} \quad Q_{p+q+r-2} \quad \ldots \quad Q_1 \right\|$, тобто $Q_j = D_j$ для всіх $1 \leq j \leq p+q+r-1$. Розглянемо рівності

$$\left\| Q_{p+q+r} \quad D_{p+q+r-1} \quad D_{p+q+r-2} \quad \ldots \quad D_2 \right\| M_r(A,B) = -D_1 N_r(A,B),$$

$$D_1 \left\| D_{p+q+r-1} \quad D_{p+q+r-2} \quad \ldots \quad D_1 \right\| M_r(A,B) = -D_1 N_r(A,B).$$

Через те, що $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$, то з останніх двох рівностей здобуваємо, що $Q_{p+q+r} = D_1 D_{p+q+r-1}$ і $D_j = D_1^j$ для всіх $1 \leq j \leq (p+q+r)$. Отже, на підставі леми для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D_1$, єдиність якого випливає із максимальності рангу матриці $M_r(A,B)$.

Крім цього, із того, що $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$ та розв'язності рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$, здобуваємо $rangM_r(A,B) = (p+q+r)n$ та розв'язність рівняння $YM_{r+1}(A,B) = -N_{r+1}(A,B)$ над K. Теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай $A(x)$, $B(x) \in K_n[x]$; $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Нехай далі, для цілого числа $r \geq 0$ $rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$ і рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ розв'язне. Тоді для будь-якого натурального $k > r$ $rangM_k(A,B) = (p+q+k-1)n$, а рівняння $ZM_k(A,B) = -N_k(A,B)$ розв'язне і має єдиний розв'язне.

Теорема 3. Нехай $A(x)$, $B(x) \in K_n[x]$; $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Якщо для деякого цілого числа $r \geq 0$ $rangR_r(A,B) = (p+q+r)n$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ взаємно прості зліва.

Доведення. Нехай $r \geq 0$ - ціле число таке, що $rangR_r(A,B) = (p+q+r)n$. Тоді $rangR_r(A,B) = rang\left\| R_r(A,B), \begin{matrix} O_1 \\ I \end{matrix} \right\| = (p+q+r)n$, де O_1 – нульова $((p+q+r)n \times n)$ – матриця. Нехай далі P – поле часток кільця R. Тоді рівняння $R_r(A,B)Z = \left\| \begin{matrix} O_1 \\ I \end{matrix} \right\|$ розв'язуване над полем P. Неважко переконатись в тому [5], що із розв'язності рівняння випливає існування матриць $U(x)$ та $V(x)$ із $P_n[x]$ таких, що

$$A(x)U(x) + B(x)V(x) = I. \qquad (1)$$

Враховуючи [6] припустимо, що матриця $\|A(x),\ B(x)\|$ правоеквівалентна матриці $\|D(x),\ O\|$, тобто $\|A(x),\ B(x)\|W(x) = \|D(x),\ O\|$, де $W(x) \in GL(2n, P[x])$, $D(x) \in P_n[x]$, $(\deg\det D(x) \geq 1)$ – найбільший спільний лівий дільник матриць $A(x)$ та $B(x)$ над полем P. Враховуючи (1) отримуємо, що $D(x)$ дільник одиничної матриці, що суперечить означенню спільного лівого дільника. Теорему доведено.

Зауваження 2. Нехай $A(x) \in K_n[x]$, $B(x) \in K_n[x]$, $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Якщо для цілого числа $r \geq 0$ $rangR_r(A,B) = (p+q+r)n$, то для довільного натурального $k > r$ $rangR_k(A,B) = (p+q+k)n$.

Наслідок 3. Якщо при умовах теореми 2 для матриць $A(x)$ та $B(x)$ із $K_n[x]$ існує єдиний спільний дільник $D(x) = Ix - D$, тобто $A(x) = (Ix - D)F(x)$, $B(x) = (Ix - D)G(x)$, то матриці $F(x)$ та $G(x)$ взаємно прості зліва.

Якщо $R = P$ -полем, то з теореми 2 здобуваємо

Наслідок 4. Нехай $A(x)$, $B(x) \in P_n[x]$, $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Нехай далі, для деякого цілого числа $r \geq 0$ $rangR_r(A,B) = rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$. Тоді

А) Для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує єдиний спільний лівий дільник $D(x) = Ix - D$, $D \in P_n$;

Б) Існують матриці $U(x)$, $V(x) \in P_n[x]$ такі, що

$$A(x)U(x) + B(x)V(x) = Ix - D.$$

Зауваження 3. Нехай $A(x)$, $B(x) \in P_n[x]$, $\deg A(x) = p$, $\deg B(x) = q$. Якщо для цілого числа $r \geq 0$ $rangR_r(A,B) = rangM_r(A,B) = (p+q+r-1)n$, то для будь-якого натурального $k > r$ $rangR_k(A,B) = rangM_k(A,B) = (p+q+k-1)n$.

Теорема 2 та наслідки 3 можна застосувати до задачі про виділення лінійного дільника із многочленної матриці та під час дослідження розв'язності матричних многочленних рівнянь. Крім цього, одержані результати поширюються на многочленні матриці, в яких кількість рядків не перевищує кількості стовпців. Для розв'язності рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ можна застосувати метод, запропонований в [7].

1. Гохберг И.Ц., Хайниг Г. Результантная матрица и ее обобщения. Результантный оператор матричных полиномов // Acta sci.math. 1975. Vol.37. № ½. С. 41-61. 2. Петричкович В.М., Прокип В.М. Об общих делителях матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех.поля. 1983. Вып.18. С. 23-26. 3. Прокип В.М. Одно достаточное условие существования общих делителей матричных многочленов // Материалы 10-й конф. Молод. ученых ИППММ АН УССР. 1984. Ч.2. С. 186-189. Рук.деп. в ВИНИТИ № 7197-84 Деп. 4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971. 5. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. № 9. С.1213-1219. 6. Steward B.M. A note on least common left miltiples // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 55. P. 587-591. 7. Прокіп В.М. Про розв'язність лінійних матричних рівнянь над комутативним кільцем // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 346. С. 68-71.

УДК 517.948

В.М. Гук
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАТИВНИХ МЕТОДІВ ДО ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Сформульовані достатні умови збіжності однопараметричних методів ітеративного агрегування для лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра.

The sufficient conditions of convergence of one-parameter methods of iterative agregation for the linear integral equations of Volterra's type are formulated.

Агрегативно-ітераційні методи [1;2] виникли як узагальнення методів ітеративного агрегування, що походять з математичної економіки, де часто їх застосування оправдане практичними результатами [1;2]. Як зазначено в [2], "умови збіжності методів ітеративного агрегування невідомі". Фундаментальний результат для однопараметричного методу ітеративного агрегування наведений в [2]. Цей результат гарантує збіжність методу при $\rho(A) < 1$, де $\rho(A)$ – спектральний радіус оператора A у рівнянні

$$X = AX + b, \tag{1}$$

яке розглядають у банаховому просторі E з конусом додатних елементів E^*. При цьому фігурують й інші обмеження, які у випадку, коли простір E є скінченновимірним розмірності N, означають, що компоненти вектора b – невід'ємні, а елементи матриці A є строго додатними. Однак, як зазначено в [2], метод нерідко збігається і при $\rho(A) > 1$. В [1;2] запропонована методика дослідження методів ітеративного агрегування, яка дає змогу розглянути дещо ширший клас ітераційно-агрегативних методів. Цей клас методів охоплює,