рівнянь. Крім цього, одержані результати поширюються на многочленні матриці, в яких кількість рядків не перевищує кількості стовпців. Для розв'язності рівняння $ZM_r(A,B) = -N_r(A,B)$ можна застосувати метод, запропонований в [7].

1. Гохберг И.Ц., Хайниг Г. Результантная матрица и ее обобщения. Результантный оператор матричных полиномов // Acta sci.math. 1975. Vol.37. № ½. С. 41-61. 2. Петричкович В.М., Прокип В.М. Об общих делителях матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех.поля. 1983. Вып.18. С. 23-26. 3. Прокип В.М. Одно достаточное условие существования общих делителей матричных многочленов // Материалы 10-й конф. Молод. ученых ИППММ АН УССР. 1984. Ч.2. С. 186-189. Рук.деп. в ВИНИТИ № 7197-84 Деп. 4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971. 5. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. № 9. С.1213-1219. 6. Steward B.M. A note on least common left miltiples // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 55. P. 587-591. 7. Прокіп В.М. Про розв'язність лінійних матричних рівнянь над комутативним кільцем // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". 1998. № 346. С. 68-71.

УДК 517.948

В.М. Гук
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНИХ АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАТИВНИХ МЕТОДІВ ДО ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Сформульовані достатні умови збіжності однопараметричних методів ітеративного агрегування для лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра.

The sufficient conditions of convergence of one-parameter methods of iterative agregation for the linear integral equations of Volterra's type are formulated.

Агрегативно-ітераційні методи [1;2] виникли як узагальнення методів ітеративного агрегування, що походять з математичної економіки, де часто їх застосування оправдане практичними результатами [1;2]. Як зазначено в [2], "умови збіжності методів ітеративного агрегування невідомі". Фундаментальний результат для однопараметричного методу ітеративного агрегування наведений в [2]. Цей результат гарантує збіжність методу при $\rho(A) < 1$, де $\rho(A)$ – спектральний радіус оператора A у рівнянні

$$X = AX + b, \tag{1}$$

яке розглядають у банаховому просторі E з конусом додатних елементів E^*. При цьому фігурують й інші обмеження, які у випадку, коли простір E є скінченновимірним розмірності N, означають, що компоненти вектора b – невід'ємні, а елементи матриці A є строго додатними. Однак, як зазначено в [2], метод нерідко збігається і при $\rho(A) > 1$. В [1;2] запропонована методика дослідження методів ітеративного агрегування, яка дає змогу розглянути дещо ширший клас ітераційно-агрегативних методів. Цей клас методів охоплює, зокрема, однопараметричне та багатопараметричне агрегування. Отримані достатні умови збіжності, знайдені за допомогою цієї методики, придатні не лише для однопараметричного варіанта методу ітеративного агрегування, а й для багатопараметричних алгоритмів. При цьому компоненти матриці A і вектора b не мусять бути знакосталими, а спектральний радіус $\rho(A)$ не мусить бути меншим від одиниці. У статті розглянуто деякі результати із [3;4] на лінійні інтегральні рівняння вигляду

$$x(t)=\int_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau+f(t). \tag{2}$$

Рівняння (2) будемо розглядати в класі $L_2(a,b)$ інтегрованих на (a,b) з квадратом функцій, тобто, вважаємо, що $f(t)$, $x(t)\in L_2(a,b)$, $K(t,s)\in L_2(a,b)\times L_2(a,b)$. Задамо деяке число λ_1 (задля спрощень вважатимемо λ дійсним числом: $\lambda_1\in R^1$) та функцію $\varphi_1(t)\in L_2(a,b)$. Приєднаємо до рівняння (2) рівняння вигляду

$$y=\int_a^b \alpha(\tau)x(\tau)d\tau+\lambda_1 y \quad (\lambda_1\neq 1), \tag{3}$$

у якому λ_1 – яке-небудь дійсне число. При цьому вважаємо заданою довільно функцію $\varphi_1(t)\in L_2(a,b)$ і за її допомогою означимо функцію

$$\alpha(t)=\lambda_1\varphi_1(t)-\int_a^b K(\tau,t)\varphi_1(\tau)\,d\tau\,. \tag{4}$$

Задамо дійсні числа $\alpha^{(n)}$, а також функції $a^{(n)}(t)\in L_2(a,b)$, вимагаючи правдивості рівності

$$\alpha^{(n)}+\int_a^b a^{(n)}(t)\varphi_1(t)\,dt=\lambda_1 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

Позначимо через ε_1 множину таких функцій $x(t)\in L_2(a,b)$, для яких

$$y+\int_a^b \varphi_1(t)x(t)\,dt=\frac{1}{1-\lambda_1}\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt\;. \tag{6}$$

Виберемо довільним способом функцію $x^{(0)}(t)$ та число $y^{(0)}$, вимагаючи тільки, щоб $\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\}\in\varepsilon_1$.

Досліджуватимемо ітераційний процес, який описується за допомогою формул

$$x^{(n+1)}(t)=\int_a^b K(t,\tau)x^{(n)}(\tau)\,d\tau+a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right)+f(t), \tag{7}$$

$$y^{(n+1)}=\lambda_1 y^{(n+1)}+\int_a^b \alpha(\tau)x^{(n)}(\tau)\,d\tau+\alpha^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right). \tag{8}$$

Правдиві такі твердження.

Лема 1. *Якщо* $\{x^*(t),y^*\}$ *є розв'язком системи (2), (3), то* $\{x^*(t),y^*\}\in\varepsilon_0$.

Доведення. З (2) та (3) при $x(t)=x^*(t)$, $y=y^*$ отримуємо

$$y^*+\int_a^b \varphi_1(t)x^*(t)\,dt=\int_a^b \alpha(\tau)x^*(\tau)\,d\tau+\lambda_1 y^*+$$

$$+\int_a^b \varphi_1(t)\left(\int_a^b K(t,\tau)x^*(\tau)\,d\tau\right)dt+\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt\,.$$

Змінюючи порядок інтегрування в доданку, який містить $K(t,\tau)$ і перепозначаючи, де потрібно, t через τ, а τ через t, звідси знайдемо

$$y^*+\int_a^b \varphi_1(t)x^*(t)\,dt=\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt+\lambda_1 y^*+\int_a^b\left(\alpha(\tau)+\int_a^b K(t,\tau)\varphi_1(t)\,dt\right)x^*(\tau)\,d\tau\,.$$

Тому, враховуючи (4), будемо мати

$$y^*+\int_a^b \varphi_1(t)x^*(t)\,dt=\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt+\lambda_1 y^*+\lambda_1\int_a^b \varphi_1(\tau)x^*(\tau)\,d\tau\,.$$

Звідси випливає правдивість твердження леми.

Лема 2. *Якщо* $\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\}\in\varepsilon_0$, *то* $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}\in\varepsilon_0$.

Доведення. Очевидно, що з (7), (8) матимемо

$$y^{(n+1)}+\int_a^b \varphi_1(t)x^{(n+1)}(t)\,dt=\int_a^b \varphi_1(t)\left[\int_a^b K(t,\tau)x^{(n)}(\tau)\,d\tau\right]dt+$$

$$+\int_a^b \varphi_1(t)a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right)dt+\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt+$$

$$+\lambda_1 y^{(n+1)}+\int_a^b \alpha(\tau)x^{(n)}(\tau)\,d\tau+\alpha^{(n)}\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right)=$$

$$=\left(\lambda_1-\alpha^{(n)}-\int_a^b \varphi_1(t)a^{(n)}(t)\,dt\right)y^{(n+1)}+\left(\alpha^{(n)}+\int_a^b \varphi_1(t)a^{(n)}(t)\,dt\right)y^{(n)}+$$

$$+\int_a^b\left[\alpha(\tau)+\int_a^b K(t,\tau)\varphi_1(t)\,dt\right]x^{(n)}(\tau)d\tau+\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt.$$

Звідси, маючи на увазі (4) та (5) і там, де це потрібно, міняючи між собою позначення τ і t, отримуємо

$$y^{(n+1)}+\int_a^b \varphi_1(t)x^{(n+1)}(t)\,dt=\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt+(1-\lambda_1)\left(y^{(n)}+\int_a^b \varphi_1(t)x^{(n)}(t)\,dt\right).$$

Припускаючи, що $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}\in\varepsilon_1$, звідси одержимо $\{x^{(n+1)}(t),y^{(n+1)}\}\in\varepsilon_1$, бо можна знайти

$$y^{(n+1)}+\int_a^b \varphi_1(t)x^{(n+1)}(t)\,dt=\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt+$$

$$+(1-\lambda_1)\frac{1}{1-\lambda_1}\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt=\frac{1}{1-\lambda_1}\int_a^b \varphi_1(t)f(t)\,dt.$$

Згідно з принципом індукції це означає, що лему доведено.

Лема 3. *Нехай задані довільним способом* $\tilde{y}\in R^1$, $\tilde{x}(t)\in L_2(a,b)$, *причому*

$$\tilde{y}+\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt\neq 0. \tag{9}$$

Тоді $\left\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\right\}\in\varepsilon_1$, *де*

$$x^{(0)}(t)=\frac{\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt+y^{(0)}}{\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt+\tilde{y}}\left[\int_a^b K(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau+a^{(0)}(t)\left(\tilde{y}-y^{(0)}\right)\right]+f(t), \tag{10}$$

$$y^{(0)}=\frac{\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt+y^{(0)}}{\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt+\tilde{y}}\left[\int_a^b \alpha(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau+\alpha^{(0)}\left(\tilde{y}-y^{(0)}\right)+\lambda_1 y^{(0)}\right]. \tag{11}$$

Доведення. Використаємо із схожих на доведення попередніх двох лем міркування. Отримаємо

$$y^{(0)}+\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt=\frac{\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt+y^{(0)}}{\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt+\tilde{y}}\left[\int_a^b \varphi_1(t)\left(\int_a^b K(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_a^b \varphi_1(t)a^{(0)}(t)\left(\tilde{y}-y^{(0)}\right)dt+\int_a^b \alpha(t)\tilde{x}(t)dt+\alpha^{(0)}\left(\tilde{y}-y^{(0)}\right)+\lambda_1 y^{(0)}\right]+\int_a^b \varphi_1(t)f(t)dt=$$

$$=\frac{\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt+y^{(0)}}{\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt+\tilde{y}}\left[\int_a^b \tilde{x}(\tau)\left(\int_a^b K(t,\tau)\varphi_1(t)dt\right)d\tau+\tilde{y}\left(\int_a^b \varphi_1(t)a^{(0)}(t)dt+\alpha^{(0)}\right)+\right.$$

$$\left.+y^{(0)}\left(-\int_a^b \varphi_1(t)a^{(0)}(t)dt-\alpha^{(0)}+\lambda_1\right)+\int_a^b \alpha(t)\tilde{x}(t)dt\right]+\int_a^b \varphi_1(t)f(t)dt=$$

$$= \frac{\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt + y^{(0)}}{\int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt + \tilde{y}} \left[\lambda_1 \int_a^b \varphi_1(t)\tilde{x}(t)dt + \lambda_1 \tilde{y} \right] + \int_a^b \varphi_1(t) f(t)dt =$$

$$= \lambda_1 \left[\int_a^b \varphi_1(t)x^{(0)}(t)dt + y^{(0)} \right] + \int_a^b \varphi_1(t) f(t)dt.$$

Звідси, завдяки тому, що $\lambda_1 \neq 1$, випливає включення $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_1$.

Зважаючи на лему 3, можемо без обмеження загальності вважати, що припущення $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_1$ в умовах леми 2 справджується.

Лема 4. *Якщо* $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$, *то*

$$\int_a^b \varphi_1(t)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt + y^{(n)} - y^* = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Доведення випливає з лем 1 та 2.

Для конструювання достатніх умов збіжності ітераційного процесу (7), (8) використаємо рівності (2), (3), (7), (8) та з (12). Можна отримати

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_a^b K(t,\tau)\left(x^{(n)}(\tau) - x^*(\tau)\right)d\tau -$$

$$- \frac{a^{(n)}(t)}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}} \int_a^b \alpha(\tau)\left(x^{(n)}(\tau) - x^*(\tau)\right)d\tau + \frac{\psi^{(n)}(t)}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}} \int_a^b \varphi_1(\tau)\left(x^{(n)}(\tau) - x^*(\tau)\right)d\tau +$$

$$+ \frac{(1 - \lambda_1)a^{(n)}(t) + \psi^{(n)}(t)}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}}\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \tag{13}$$

$$\mathrm{y}^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}} \int_a^b \left(\alpha(t) - \psi^{(0)}\varphi_1(t)\right)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt + \frac{\alpha^{(n)} + \psi^{(0)}}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}}\left(y^{(n)} - y^*\right) \quad . \tag{14}$$

Приймемо

$$\mathrm{F}_0 x = \frac{a^{(n)}(t)}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}} \int_a^b \alpha(\tau)x(\tau)\,d\tau - \frac{\psi^{(n)}(t)}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}} \int_a^b \varphi_1(\tau)x(\tau)\,d\tau\,,$$

$$\mathrm{G}_0 x = \frac{\int_a^b \left(\alpha_0(t) - \psi^{(0)}\varphi_1(t)\right)x(t)\,dt}{1 - \lambda_1 + \alpha^{(n)}}, \qquad Ax = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\,. \tag{15}$$

Рівності (13), (14) можна подати у вигляді

$$\omega^{(n+1)} = H_\psi \omega^{(n)}, \tag{16}$$

де $\omega^{(k)} = \{x^{(k)} - x^*,\ y^{(k)} - y^*\}$,

$$H_{\psi} = \begin{pmatrix} a - F_0 & \dfrac{(1-\lambda_1)a^{(n)}(t) + \psi^{(n)}}{1-\lambda_1+\alpha^{(n)}} \\ G_0 & \dfrac{\alpha^{(n)} - \psi^{(0)}}{1-\lambda_1+\alpha^{(n)}} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Якщо справджуються умови леми 2, то припущення, що*

$$\left\| H_{\psi} \right\|_1 \le q < 1, \tag{17}$$

де $\|\omega\|_1 = \|x\| + |y|$ $(x \in L_2(a,b))$, $y \in R^1$, *а норма* $\left\| H_{\psi} \right\|_1$ *породжена* $\|\omega\|_1$ *елемента* $\{x(t), y\} \in L_1[a,b] \times R^1$, *то послідовність* $\left\{ x^{(n)}(t), y^{(n)} \right\}$ *збігається до розв'язку* $\{x^*(t), y^*\} \in L_2(a,b) \times R^1$ *не повільніше від геометричної прогресії із знаменником* q. *При цьому* $\left\{ x^{(n)}(t), y^n \right\} \in \varepsilon_1$, $\{x^*(t), y^*\} \in \varepsilon_1$.

Доведення. З (17) та з рівностей (13), (14) випливає, що оператор H_{ψ} є стиском (на ε_1). Тому застосовний принцип Банаха.

Позначимо

$$H_0 x = \int_a^b K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda_1+\alpha^{(n)}} \int_a^b [(1-\lambda_1)\varphi_1(\tau) + \alpha(\tau)]x(\tau)\,d\tau . \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай* $\left\{ x^{(0)}(t), y^{(0)} \right\} \in \varepsilon_1$ *і*

$$\|H_0\| \le q_0 < 1 . \tag{19}$$

Тоді послідовність $\left\{ x^{(n)}(t) \right\}$, *побудована за допомогою ітераційного процесу (7), (8), збігається до розв'язку* $x^*(t) \in L_2(a,b)$ *рівняння (2) не повільніше від геометричної прогресії із знаменником* q_0 .

Доведення. Оскільки із (7), (8) можна отримати рівності

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_a^b K(t,\tau)\left(x^{(n)}(\tau) - x^*(\tau)\right)d\tau -$$

$$- \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda_1+\alpha^{(n)}} \int_a^b [(1-\lambda_1)\varphi_1(\tau) - \alpha(\tau)]\left(x^{(n)}(\tau) - x^*(\tau)\right)d\tau ,$$

то з (19) випливає твердження теореми.

Спеціальний вибір λ_1, φ_1, $\psi^{(n)}$ дозволяє конкретизувати теореми 1 та 2.

Теорема 3. *Якщо* λ_1 є власним числом оператора A , *означеного за (15), а* $\psi^{(n)} = \psi$ $(n = 0,1,2,\ldots)$– *власним елементом оператора* A, φ_1 – *власним елементом спряженого до* A *оператора* A^*, *які відповідають власному числові* λ_1, *то з припущення, що спектр оператора* A *становлять власні числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *і, що*

$$\sup_{i=2,3,\ldots} |\lambda_i| = q_2 < 1,$$

випливає твердження теореми 2.

Зауваження. Як вже зазначалося, λ_1 насправді не конче мусить бути дійсним числом. Результати, наведені вище, можна розповсюдити на загальні класи рівнянь.

Зауваження 2. Якщо $|\lambda_1| > 1$ і справджуються умови теореми 3, то під час практичних обчислень для уникнення труднощів, зумовлених можливістю нагромадження похибок заокруглень, доцільно використовувати при кожному n або при деяких з них рівність (6) як контрольну.

1. Дудкин Л.М., Ершов Э.Б. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов // Плановое хозяйство. 1965. №5. С. 59-63. 2. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы.М., 1985. 3. Шувар Б.А. О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений. Львов. политехн. ин-т.-Львов, 1988.-11с.-Деп. в Укр. НИИНТИ 10.06.88, №1473-Ук 88 4. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. Львов. политехн. ин-т.-Львов, 1992.-21с.-Деп. в Укр НИИНТИ 15.01.92, № 43-Ук 92.

УДК 517.956.4

І.П. Мединський
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

ПРО АПРІОРНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Установлено апріорні оцінки розв'язків параболічних систем із слабким виродженням на початковій гіперплощині в спеціальних просторах Гельдера.

The a priori estimates of the solutions of parabolic systems with weak degenerations on the initial hyperplane in special Hölder spaces is established.

Дослідженню параболічних систем рівнянь з виродженням на початковій гіперплощині присвячені праці [1,2,5-7]. В [1,2,6] побудована і досліджена фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.) задачі Коші для таких систем. Властивості інтегралів типу похідних від об'ємного потенціалу вивчали в [8]. Тут ці результати застосовувані для встановлення апріорних оцінок розв'язків параболічних за Петровським систем рівнянь із слабким виродженням на початковій гіперплощині у просторах Гельдера. Одержані оцінки застосовуватимуться для встановлення коректної розв'язуваності лінійних систем, а також локальної розв'язуваності відповідних квазілінійних систем.

1. Використовуватимемо такі позначення: n, b, N – задані натуральні числа; T – задане додатне число; $\alpha, \beta : [0,T] \to [0,\infty)$ – неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$ для $t > 0$, β монотонно неспадна; $q \equiv 2b/(2b-1)$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H, \}$, $x \in R^n$ $H \subset [0,+\infty)$; C_N – сукупність усіх стовпців висоти N, елементами яких є комплексні