УДК 517

І.Т. Кравець
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра обчислювальної математики

ВИКОРИСТАННЯ ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ ДЛЯ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА НА ПРИКЛАДІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У цій роботі наведено двосторонні умови методу. На прикладі системи диференціальних рівнянь показано його застосування. Показано, що якщо умови $u_0 \geq 0, \quad f(t) \geq 0$ **не виконуються, тоді можна розглядати дві задачі, які володіють двосторонністю.**

In this work the conditions of two-sides methods are given. The usage of these method is shown by example of systems of differential equations. It is proved that if conditions $u_0 \geq 0, \quad f(t) \geq 0$ **are false, two problems, which own the two-sidesness the same way, can be considered.**

Розглядаємо задачу Коші

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t); \qquad t \in (0,T]; \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

Нехай $u_0 \in X, \quad f \in L^1(0,T;X)$. $A(t)$ – щільно визначений оператор з областю визначення $D(A)$, незалежною від t. Нехай $A(t)$, для всякого $t>0$ є генератором стискаючої C_0-напівгрупи,

Представимо розв’язок задачі (1) у вигляді

$$u(t) = \overline{U}(t,0)u_0 + \int_0^t \overline{U}(t,s)f(s)ds - \int_0^t \overline{U}(t,s)[A(s) - \overline{A}(s)]u(s)ds, \tag{2}$$

де $\overline{A}(t)$ – кусково-сталий операторний коефіцієнт, що апроксимує оператор $A(t)$ знизу, еволюційний оператор $\overline{U}(t,s)$ володіє властивістю

$$\overline{U}(t,s) \succeq 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

що забезпечується тим, що $A(t)$ для будь якого фіксованого $t \in [0,T]$ породжує монотонну напівгрупу.

Нехай K цілком правильний конус в Банаховому просторі, який породжує напівпорядок у X.

Раніше[*] було доведено, що при виконанні умов $u_0 \succeq 0, \quad f(t) \succeq 0, \quad A(t) \succeq \overline{A}(t) \succeq 0, \quad A(t)$ – для кожного фіксованого t породжує монотонну напівгрупу і існують такі співвідношення:

---

[*] *I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, I.T. Kravez A constractive representation of the solution of a first order differential equation with a non-constant operator coefficient in Banach space and appications, Preprint / NTZ 40/1997 Universität Leipzig. ð. 11.*

$$u^{2k+1}(t) \preceq u(t) \preceq u^{2k}(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

$$u^{2k}(t) - u^{2k+1}(t) = -u^{(2k+1)}(t), \tag{3}$$

Якщо умови $u_0 \geq 0, \quad f(t) \geq 0$ не виконуються, тоді можна розглянути дві задачі

$$\frac{du_{\pm}}{dt} + A(t)u_{\pm} = f_{\pm}(t), \quad t \in (0,T)$$

$$u_{\pm}(0) = \frac{1 \pm signu_0}{2} u_0, \tag{4}$$

де $f_{\pm}(t) = \frac{1}{2}[f(t) \pm |f(t)|]$, а X – Банахів простір, що складається зі звичайних дійснозначних функцій типу $C^{\alpha}[0,T), \quad W_p^{\alpha}(0,T)$ тощо. І для кожної із задач використати двосторонній FD – метод. Тоді, виходячи зі співвідношення (3), маємо

$$u^{2k+1}(t, f_+) \leq u_+(t) \leq u^{2k}(t, f_+),$$

$$u^{2k}(t, f_-) \leq u_-(t) \leq u^{2k-1}(t, f_-),$$

що зумовлює до оцінки

$$u^{2k-1}(t, \quad f_+) + u^{2k}(t, \quad f_-) \leq u(t) \leq u^{2k}(t, \quad f_+) + u^{2k-1}(t, \quad f_-)$$

або

$$u^{2k-1}(t, \quad f) + u^{(2k)}(t, \quad f_-) \leq u(t) \leq u^{2k-1}(t, \quad f) + u^{(2k)}(t, \quad f_+).$$

Розглядаємо систему диференціальних рівняння

$$\frac{du(t)}{dt} + A_n(t)u(t) = f(t), \quad t \in (0,T], \qquad u(0) = u_0, \tag{5}$$

де $u(t), \quad u_0, \quad f(t) \in R^n$,

$$A_n(t) = A_n^0 + A_n^1(t),$$

$$A_n^0 = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \cdots 0 \\ -1 & 2 & -1 \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \ \ddots -1 \\ 0 & \cdots & -1 \quad 2 \end{pmatrix},$$

$$A_n^1(t) = diag(q(x_1,t), \ldots, q(x_n,t)),$$

$$q(x,t) > 0 \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall t \in [0,T],$$

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1, \quad x_i = ih,$$

$$(n+1)h = 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Припускаємо, що $q(x,t) \in Q^0([0,1] \times [0,T])$ (лінії розривання функції $q(x, t)$ – паралельні до координатної вісі t) і вибираємо

$$\bar{q}(x_i,t) = \bar{q}(x_i, \xi_{l,i}), \quad \xi_{l,i} \in [t_{l-1}, t_l], \quad i = 1, \cdots, n$$

так що

$$q(x_i,t) \ge \bar{q}(x_i,\xi_{l,i}) \ge 0, \quad t \in [t_{l-1},t_l], \quad l=1,\cdots,M.$$

Позначимо $\bar{A}_n = A_n^0 + \bar{A}_n^1(t)$ з

$\bar{A}_n^1(t) = diag(\bar{q}(x_1,t),\cdots,\bar{q}(x_n,t))$, тоді

$$A_n(t) - \bar{A}_n(t) = diag(q(x_i,t) - \bar{q}(x_i,t))_{i=1,\dots,n} \succeq 0,$$

де знак $\succeq$ означає , що всі елементи матриці є негативні. Конус K складається з векторів з негативними компонентами з $L_p(0,T)$, $p \in [1,\infty)$. Використовуючи спектральну матричну норму, отримаємо

$$A_n(t) - \bar{A}_n(t) \preceq \left\| A_n(t) - \bar{A}_n(t) \right\| I \preceq qI,$$

$$q = \max_{1 \le i \le n} \max_{t \in [0,T]} \left[q(x_i,t) - \bar{q}(x_i,t) \right].$$

Матриця – $A_n(t)$ породжує монотонну напівгрупу для будь якого фіксованого $t \in [0,T]$. Відомо, що $e^{Bt} \succeq 0$, $t \ge 0$, $(B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n)$ тоді і тільки тоді, якщо

$$b_{ij} \ge 0, \quad i \ne j, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

що є очевидним у нашому випадку.

При $f(t) \succeq 0$, $u_0 \succeq 0$, $qT \le 1$ за допомогою викладеного вище методу ми отримуємо двосторонню апроксимацію.

УДК 512.64

В.М. Прокіп
ІППММ НАН України ім. Я.С. Підстригача

РЕЗУЛЬТАНТНА МАТРИЦЯ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Встановлено певне узагальнення результантної матриці для многочленних матриць та вказано її застосування до знаходження спільних дільників многочленних матриць над комутативними кільцями.

Some generalization of the resultant matrix for polynomial matrices and its application to the investigation of the common divisors of polynomial matrices over commutative rings are found.

Нехай K – комутативне кільце з одиницею, відмінною від нуля. Введемо позначення: K_n і $K_n[x]$ – кільця $(n \times n)$-матриць над K і кільцем многочленів $K[x]$; I – одинична, а O – нульова матриці порядку n.

Кажуть, що матриці $A(x) \in K_n[x]$ та $B(x) \in K_n[x]$ мають спільний лівий дільник, якщо $A(x) = D(x)F(x)$ і $B(x) = D(x)G(x)$, де $D(x) \in K_n[x]$ і $\deg\det D(x) \ge 1$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$