x_5=0.2838 y_5=4.469;

• один цикл, породжений комбінацією ($5a^+$) і ($5б^+$):

x_6=1.017 y_6=9.346.

Для кожного з вказаних циклів існує симетричний цикл, зсунутий по фазі на π радіан.

При значенні a, коли умова (7) не виконується, а корені (3) стають комплексними, появляється зона

$$1 > x_{кр1} < x < x_{кр2} > 1 ,$$

де $x_{кр1}$ і $x_{кр2}$ – розв‘язки рівняння

$$xe^{-x} = \frac{A}{a \sin \varepsilon} ,$$

в якій функції (5а) є невизначені в дійсній площині. Із зростанням a зона невизначеності зростає і всі нерухомі точки поступово зникають, окрім x_1, y_1.

Встановлення умов стійкості виявлених двократних циклів є предметом окремих досліджень.

1. Заяць В.М. Побудова комп‘ютерної моделі дискретної коливальної системи другого порядку. // Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці. Львів, 1999. С.87-88.
2. Заяць В.М., Синицький Л.А. Синхронізація генераторів, що працюють у дискретному часі. // Вісник ДУ "Львівська політехніка". 1999, № 366. С. 67-69.

УДК 539.3

В.М. Вігак, Я.С. Пушак
Українська академія друкарства

ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ СУЦІЛЬНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

На основі запропонованого методу інтегрування диференціальних рівнянь суцільності Коші для двовимірних неосесиметричних задач механіки деформованого твердого тіла в кругових областях одержані вихідні інтегро-диференціальні рівняння суцільності, які при необхідних умовах узгодження переміщень з деформаціями зведені до відомого в механіці диференціального рівняння суцільності. Коректно з врахуванням умов узгодження виведено формули для визначення перміщень через деформації, знайдено інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень.

Initial integral differential entirety equation, which under necessary circumstancer of transference coordination with deformations are reduced to well-known in mechanics differential entirety equation, have been obtained on the basis of proposed method of interration of Koshi entireti differential equation for two-dimension nonaxlesymetrial mechanics tasks of deformable solid in the circual fields/ Formulas for the determination of transferences through deformations have been

concluded and integral entirety conditions for deformanions and tranaferences have been found according to the circumstancer of coordination.

При виведенні диференціальних рівнянь суцільності в деформаціях для механіки деформівного твердого тіла беззастережно використовується диференціювання рівнянь суцільності Коші між деформаціями та переміщеннями [1-4]. Операція диференціювання рівнянь є математично обгрунтованою лише для необмежених областей у вигляді площини та простору. Для області з границею завжди треба доводити еквівалентність вихідної системи рівнянь приведеній у результаті диференціювання вихідної. При цьому, як показано нижче, вимога еквівалентності накладає певні обмеження на переміщення й деформації. Крім того, оскільки існують диференціальні рівняння суцільності для деформацій, то очевидно повинні бути й відповідні інтегральні умови суцільності для них, які не залежать від математичних моделей деформування твердих тіл, властивостей і структури матеріалів суцільного середовища і які разом з інтегральними умовами рівноваги для напружень [5, 6] можна вигідно використати як критерії достовірності числових розрахунків напружено деформованого стану елементів конструкцій, бо не залежать від методів і алгоритмів використаних при розрахунках.

У роботі для двовимірних неосесиметричних задач механіки деформівних твердих тіл на основі запропонованого способу інтегрування диференціальних рівнянь суцільності Коші між деформаціями та переміщеннями у кругових областях одержані вихідні інтегро-диференціальні рівняння суцільності в деформаціях, які за відповідних необхідних умовах погодження переміщень з деформаціями зведені до відомого в механіці диференціального рівняння суцільності. При цьому коректно з врахуванням вказаних умов погодження виведені формули для визначення переміщень через деформації та знайдені необхідні інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень.

Для двовимірних неосесиметричних задач механіки рівняння суцільності Коші в полярній системі координат *(r, φ)* записуються [1]

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ e_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ e_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right), \tag{1}$$

де u і v – компоненти вектора переміщень відповідно в радіальному й коловому напрямках; $e_i(i = r, \varphi)$ – поздовжні, $e_{r\varphi}$ – зсувні деформації.

Для визначення переміщень і виведення рівняння суцільності в деформаціях на основі рівнянь (1) у випадку кругової області $D = \{r \in [R_1, R_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ з внутрішнім отвором радіуса R_1 та із зовнішнім радіусом R_2 введемо безрозмірну радіальну координату $\rho = r / R_2$. Тоді $D = \{\rho \in [k, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}$, де $k = R_1 / R_2$. Позначимо $u_1 = u / R_2$, $v_1 = v / R_2$ і надалі індекс “*1*” будемо опускати, пам’ятаючи, що введені переміщення – безрозмірні. Розв’яжемо перших два рівняння (1) відносно u і v і виразимо компоненти безрозмірних переміщень через поздовжні деформації за формулами

$$2u = u(k) + u(1) + \int_k^1 e_r \quad sign(\rho - \eta) \quad d\eta, \tag{2}$$

$$4v = 4v(0) + \int_0^{2\pi} \left[2\rho e_\varphi - u(k) - u(1)\right] sign(\varphi - \xi) \quad d\xi -$$

$$-\int_{0}^{2\pi}\int_{k}^{1} e_r \qquad sign(\rho-\eta) \qquad d\eta sign(\varphi-\xi) \qquad d\eta \qquad d\xi \tag{3}$$

Тут і надалі для спрощення прийняте позначення і врахована періодичність функцій від кута φ.

Із формул (2), (3) видно, що для визначення переміщень через деформації треба знайти також переміщення $u(k), u(1), v(0)$ через деформації. При цьому із формули (2) при $\rho = k,1$ випливає умова

$$u(1)-u(k)=\int_{k}^{1} e_r d\rho, \tag{4}$$

а із формули (3) при $\varphi = 0$ – умова

$$\int_{0}^{2\pi}\left[2\rho e_{\varphi}-u(k)-u(1)\right]d\varphi=\int_{0}^{2\pi}\int_{k}^{1} e_r\, sign(\rho-\eta)d\eta\, d\varphi. \tag{5}$$

Підставимо переміщення згідно з формулами (2), (3) в третє рівняння (1), отримаємо вихідне інтегродиференціальне рівняння сумісності чи суцільності

$$4e_{r\varphi}=\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(k)+u(1)+\int_{k}^{1} e_r\, sign(r-\eta) \qquad d\eta\right]+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\left[4v(0)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{0}^{2\pi}\left(2\rho e_{\varphi}-u(k)-u(1)\right)sign(\varphi-\xi) \qquad d\xi-\int_{0}^{2\pi}\int_{k}^{1} e_r\, sign(\rho-\eta)sign(\varphi-\xi)d\eta d\xi\right]\right\}. \tag{6}$$

Продиференціювавши попередньо помножене на ρ рівняння (6) по φ і ρ, одержимо відоме рівняння суцільності [1]

$$\frac{\partial^2\left(\rho\, e_{r\varphi}\right)}{\partial\rho \qquad \partial\varphi}=\frac{\partial^2 e_r}{\partial\varphi^2}-\rho\frac{\partial e_r}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial e_{\varphi}}{\partial\rho}\right). \tag{7}$$

Правда, для еквівалентності диференціального рівняння суцільності (7) вихідному інтегродиференціальному (6) переміщення і деформації повинні задовольняти необхідну умову погодження

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(k)+u(1)\right]+\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\left[4v(0)-\int_{0}^{2\pi}\left(u(k)+u(1)\right)sign(\varphi-\xi)d\xi\right]\right\}=$$

$$=4\rho\, e_{r\varphi}(0)+2ke_{r\varphi}(k)+2e_{r\varphi}(1)-2ke_{r\varphi}(k,0)-2e_{r\varphi}(1,0)+$$

$$+\int_{0}^{2\pi}\left[ke_r(k)+e_r(1)-k^2\frac{\partial}{\partial\rho}e_{\varphi}(k)-\frac{\partial}{\partial\rho}e_{\varphi}(1)\right]sign(\varphi-\xi)d\xi-$$

$$-2\int_{k}^{1}\frac{\partial e_r(0)}{\partial\varphi}sign(\rho-\eta)d\eta, \tag{8}$$

яка випливає з відповідного інтегрування рівняння (7) по ρ і φ з метою повернення до рівняння (6) і подальшого порівняння вихідного рівняння (6) з одержаним. Можна показати, що умова погодження (8) виражає необхідність виконання рівняння суцільності (6), а значить і третього рівняння (1), і на границі області при $\rho=k,1$.

На основі третього рівняння (1) з врахуванням формули (2) можна записати

$$2\rho e_{r\varphi} = 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(k) + u(1) + \int_k^1 e_r \, sign(\rho - \eta) d\eta\right].$$

Ця рівність повинна виконуватися при довільному куті φ. Тому при $\varphi = 0$ маємо

$$2\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v(0)}{\rho}\right) = 2\rho e_{r\varphi}(0) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(k) + u(1) + \int_k^1 e_r \, sign(\rho - \eta) d\eta\right]_{\varphi=0}. \tag{9}$$

Враховуючи рівність (9), умову погодження (8) перепишемо у вигляді

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}[u(k)+u(1)] + \int_0^{2\pi} (u(k)+u(1)) sign(\varphi - \xi) d\xi = 2\frac{\partial}{\partial\varphi}[u(k)+u(1)]_{\varphi=0} +$$

$$+ 2ke_{r\varphi}(k) + 2e_{r\varphi}(1) - 2ke_{r\varphi}(k,0) - 2e_{r\varphi}(1,0) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[ke_r(k) + e_r(1) - k^2 \frac{\partial}{\partial\rho} e_\varphi(k) - \frac{\partial}{\partial\rho} e_\varphi(1)\right] sign(\varphi - \xi) d\xi.$$

Легко зауважити, що остання рівність одержується інтегруванням по φ попередньо помноженого на функцію $\mathrm{sign}(\varphi - \xi)$ рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[u(k)+u(1)] + u(k) + u(1) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[ke_{r\varphi}(k) + e_{r\varphi}(1)\right] +$$

$$+ ke_r(k) + e_r(1) - k^2 \frac{\partial}{\partial\rho} e_\varphi(k) - \frac{\partial}{\partial\rho} e_\varphi(1), \tag{10}$$

з врахуванням періодичності функцій від кута φ.

Розв'язок рівняння (10) відносно невідомої суми переміщень $u(k) + u(1)$ можна подати

$$u(k) + u(1) = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f \sin|\varphi - \xi| d\xi, \tag{11}$$

де A, B – довільні сталі, а функція $f(\varphi)$ виражає праву частину рівняння (10). Поклавши в розв'язку (11) $\varphi = 0$ та $\varphi = 2\pi$, з врахуванням періодичності переміщень отримаємо систему рівнянь

$$[u(k)+u(1)]_{\varphi=0} = A + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f \sin\varphi \, d\varphi = A - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f \sin\varphi \, d\varphi,$$

звідки випливають рівності

$$A = [u(k)+u(1)]_{\varphi=0}, \tag{12}$$

$$\int_0^{2\pi} f \sin\varphi \, d\varphi = 0. \tag{13}$$

Продиференціювавши розв'язок (11) по φ та поклавши $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$, аналогічно попередньому знайдемо, що

$$B = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[u(k) + u(1)\right]_{\varphi=0}, \tag{14}$$

$$\int_0^{2\pi} f \cos\varphi \, d\varphi = 0. \tag{15}$$

З іншого боку, значення переміщень $A\cos\varphi + B\sin\varphi$ у розв'язку (11) виражає переміщення циліндричного тіла у радіальному напрямку як жорсткого цілого. Тому можна покласти $A=B=0$, що згідно з рівностями (12), (14) означає

$$\left[u(k) + u(1)\right]_{\varphi=0} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[u(k) + u(1)\right]_{\varphi=0} = 0. \tag{16}$$

Оскільки функція $f(\varphi)$ дорівнює правій частині рівняння (10), то інтегральні умови суцільності (13), (15) можна записати у явному вигляді

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \left[k e_{r\varphi}(k) + e_r(1) - k^2 \frac{\partial}{\partial \rho} e_{\varphi}(k) - \frac{\partial}{\partial \rho} e_{\varphi}(1) \right] \begin{matrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{matrix} \mp \right.$$

$$\left. \mp \left[k e_{r\varphi}(k) + e_{r\varphi}(1) \right] \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix} \right\} d\varphi = 0. \tag{17}$$

Ці умови є принципово важливими для однозначного визначення напруженого стану в круговій області з внутрішнім отвором.

Тепер з врахуванням однієї з рівностей (16) розв'язок рівняння (9) для визначення невідомого значення переміщення $v(0)$ можна записати

$$4v(0) = 2\rho \int_k^1 \frac{e_{r\varphi}(0)}{\eta} \, sign(\rho - \eta) d\eta - \int_k^1 \frac{\partial e_r(0)}{\partial \varphi} \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)\rho + \frac{2}{\eta}|\rho - \eta| \right] d\eta \tag{18}$$

за умови, що значення, яке забезпечує обертання циліндричного тіла як жорсткого цілого кругом своєї осі за законом $\left(v(1,0) + \frac{v(k,0)}{k}\right)\rho$, покладено таким, що дорівнює нулю, тобто $kv(1,0) + v(k,0) = 0$.

Отже, визначивши за формулою (11) при $A=B=0$ значення сумарних радіальних переміщень $u(k) + u(1)$ і за формулою (18) - колові переміщення $v(0)$, із розв'язків (2), (3) повністю визначаються переміщення u і v у всій області визначення з врахуванням умови погодження (8). Використовуючи формули (4), (11) можна знайти окремо радіальні переміщення на границях області при $\rho = k,1$.

Зауважимо, що ще два варіанти визначення переміщень на основі першого і третього та другого і третього рівнянь (1) призводить до того ж рівняння суцільності (7), однак, спосіб визначення переміщень дещо трудніший і менш прозорий.

Виясним тепер, яким інтегральним умовам суцільності, крім умов (5), (17), повинні задовольняти деформації та радіальні переміщення. Для цього проінтегруємо розв'язок (2) по φ в межах від 0 до 2π й використаємо умову (5), одержимо інтегральну умову

$$\int_0^{2\pi} u \, d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} e_{\varphi} \, d\varphi, \tag{19}$$

яка справедлива для всіх кругових областей, що розглядаються в роботі.

Проінтегруємо рівняння суцільності (7) по ρ і φ відповідно в межах від k до 1 та від 0 до 2π, одержимо умову

$$\int_0^{2\pi}\int_k^1 e_r d\rho \qquad d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[e_r(1) - ke_r(k) + k^2\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho} - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right] d\varphi\,. \tag{20}$$

На підставі цієї умови й рівності (4) можна записати інтегральну умову для різниці переміщень

$$\int_0^{2\pi}[u(1) - u(k)]d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[e_r(1) - ke_r(k) + k^2\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho} - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right] d\varphi\,. \tag{21}$$

З іншого боку, проінтегрувавши розв'язок (11) по φ в межах від 0 до 2π, з використанням рівності (15) отримаємо умову для суми цих переміщень

$$\int_0^{2\pi}[u(k) - u(1)]d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[e_r(1) - ke_r(k) - k^2\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho} - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right]. \tag{22}$$

Із рівностей (21), (22) випливають окремі умови для радіальних переміщень на границях області

$$\int_0^{2\pi} u(k)d\varphi = k\int_0^{2\pi}\left(e_r(k) - k\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho}\right)d\varphi, \int_0^{2\pi} u(1)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(e_r(1) - k\frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right)d\varphi. \tag{23}$$

Використовуючи тепер умову (19) при $\rho = k,1$ та рівності (23), можна записати ще такі умови:

$$\int_0^{2\pi}\left(e_r(k) - e_\varphi(k) - k\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho}\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(e_r(1) - e_\varphi(1) - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right)d\varphi = 0\,,$$

на основі яких інтегральну умову (20) можна подати

$$\int_0^{2\pi}\int_k^1 e_r d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(e_\varphi(1) - ke_\varphi(k)\right)d\varphi\,.$$

Очевидно, що з використанням наведених вище співвідношень і умов можна одержати ще інші інтегральні умови. Наприклад, розв'язавши рівняння (7) відносно похідної $\partial e_\varphi / \partial\rho$ та поклавши в знайденому розв'язку $\rho = k,1$, отримаємо диференціальне рівняння для визначення інтегральної характеристики радіальних деформацій

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\int_k^1 e_r d\rho + \int_k^1 e_r d\rho = e_r(1) - ke_r(k) + k^2\frac{\partial e_\varphi(k)}{\partial\rho} - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho} - k\frac{\partial e_{r\varphi}(k)}{\partial\varphi} + \frac{\partial e_{r\varphi}(1)}{\partial\varphi}, \tag{24}$$

розв'язок якого можна подати

$$\int_k^1 e_r d\rho = A_1\cos\varphi + B_1\sin\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f\sin|\varphi - \xi|\,d\xi\,,$$

де функція $f_1(\varphi)$ дорівнює правій частині рівняння (24). Як і для рівняння (10) можна показати, що функція $f_1(\varphi)$ повинна задовольняти необхідні умови

$$\int_0^{2\pi} f_1\cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} f_1\sin\varphi\, d\varphi = 0\,. \tag{25}$$

Порівнюючи тепер умови (13), (15) з умовами (25) з врахуванням значень функцій $f(\varphi)$ та $f_1(\varphi)$, приходимо до висновку, що для виконання умов однозначності визначення переміщень (17) достатньо виконання умов

$$\int_0^{2\pi}\left\{\left[e_r(\gamma)-\gamma\frac{\partial}{\partial\rho}e_\varphi(\gamma)\right]\begin{matrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{matrix}\mp e_{r\varphi}(\gamma)\begin{matrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{matrix}\right\}d\varphi=0 \tag{26}$$

при $\gamma=k$ або $\gamma=1$. Умови (26) математично строго обгрунтовано вирішують питання визначення коефіцієнтів для функцій розкладу напружень у ряди Фур'є при $n=1$ у випадку неосесиметричних двовимірних задач механіки в двозв'язній круговій області та дещо конкретніше й прозоріше порівняно з відомими способами [5, 7] дають можливості сформулювати умови однозначного визначення пружного чи термопружного стану для таких задач.

Отже, на основі запропонованого способу інтегрування рівнянь суцільності (1) для кругової області з отвором строго обгрунтовано вивід рівняння суцільності (7), коректно з врахуванням необхідної умови погодження (8) знайдені формули (2), (3), (11), (18) для визначення переміщень через деформації та отримані відповідні інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень.

Для кругової області без отвору – $D=\{\rho\in[0,1],\varphi=[0,2\pi]\}$ розв'язки перших двох рівнянь (1) вигідно подати

$$u=u(0,\varphi)+\int_0^\rho e_r\,d\eta,\quad 2v=2v(\rho,0)+\int_0^{2\pi}\left[\rho e_\varphi-u(0,\xi)-\int_0^\rho e_r\,d\eta\right]sign(\varphi-\zeta)d\xi\,. \tag{27}$$

Підставивши розв'язки (27) у третє рівняння (1), отримаємо інтегродиференціальне рівняння суцільності

$$2\rho e_{r\varphi}=2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(0,\varphi)+\int_0^\rho e_r d\eta\right]+\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\left[2v(\rho,0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^{2\pi}\left(\rho e_\varphi-u(0,\xi)-\int_0^\rho e_r d\eta\right)sign(\varphi-\xi)d\xi\right]\right\}, \tag{28}$$

яке диференціюванням по ρ і φ зводиться до диференціального рівняння (7) за виконання необхідної умови погодження

$$\frac{\partial u(0,\varphi)}{\partial\varphi}+\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v(\rho,0)}{\rho}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}u(0,\xi)sign(\varphi-\xi)d\xi=\rho e_{r\varphi}(\rho,0)-\int_0^\rho\frac{\partial}{\partial\varphi}e_r(\eta,0)d\eta\,. \tag{29}$$

Виходячи з третього рівняння (1) та розв'язку (27) для радіальних переміщень, при $\varphi=0$ можна записати

$$\rho e_{r\varphi}(\rho,0)=\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v(\rho,0)}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[u(0,0)+\int_0^\rho e_r(\eta,0)d\eta\right]. \tag{30}$$

З використанням цієї рівності із умови (29) отримуємо інтегродиференціальне рівняння

$$2\frac{\partial u(0,\varphi)}{\partial\varphi}+\int_0^{2\pi}u(0,\xi)sign(\varphi-\xi)d\xi=2\frac{\partial}{\partial\varphi}u(0,0)$$

для визначення переміщень $u(0,\varphi)$, яке еквівалентне диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 u(0,\varphi)}{\partial\varphi^2}+u(0,\varphi)=0\,.$$

Розв'язком цього рівняння є рівність

$$u(0,\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi\,,$$

де як і для кругової області з отвором можна покласти A=B=0 і тоді $u(0,\varphi)=\dfrac{\partial u(0,\varphi)}{\partial\varphi}=0$. З врахуванням останньої рівності для визначення переміщень $v(\rho,0)$ отримуємо рівняння (30), розв'язок якого можна подати

$$v(\rho,0)=\int_0^{\rho}\left[\frac{\rho}{\eta}e_{r\varphi}(\eta,0)+\left(1-\frac{\rho}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}e_r(\eta,0)\right]d\eta\,, \qquad (31)$$

звідки випливає, що $v(0,0)=0$. Остання рівність справедлива для довільного кута φ, тобто $v(0,\varphi)=0$, бо з третього рівняння (1) при $\rho=0$ переміщення $v(0,\varphi)=\dfrac{\partial u(0,\varphi)}{\partial\varphi}=0$.

Із формули (31) при $\rho=1$ отримуємо рівність

$$v(1,0)=\int_0^1\frac{1}{\rho}\left[e_{r\varphi}(\rho,0)+(\rho-1)\frac{\partial}{\partial\varphi}e_r(\rho,0)\right]d\rho$$

і для збіжності інтеграла в правій частині необхідна умова $e_{r\varphi}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}e_r(0,0)$. Правда, на основі третього рівняння (1) з врахуванням розв'язку (27) для радіальних переміщень можна записати

$$\rho\, e_{r\varphi}=\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^{\rho}e_r d\eta\,,$$

звідки шляхом диференціювання по ρ і подальшого переходу до границі при $\rho\to 0$ можна отримати необхідність виконання більш сильної умови $e_{r\varphi}(0,\varphi)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}e_r(0,\varphi)$.

Із розв'язку (27) для v при $\varphi=0$ з врахуванням рівності $u(0,\varphi)=0$ отримуємо

$$\rho\int_0^{2\pi}e_{\varphi}d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}e_r d\eta\, d\varphi$$

інтегральну умову

яка при $\rho\to 0$ набуває вигляду

$$\int_0^{2\pi}\left[e_r(0,\varphi)-e_{\varphi}(0,\varphi)\right]d\varphi=0.$$

Проінтегрувавши рівняння (7) для суцільного круга по області D, отримаємо ще таку умову:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e_r d\rho\, d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[e_r(1,\varphi)-\frac{\partial e_{\varphi}(1,\varphi)}{\partial\rho}\right]d\varphi.$$

Для площини, тобто для області $D=\{\rho\in[0,\infty),\varphi\in[0,2\pi]\}$, при умові затухання переміщень, деформацій та їхніх похідних при ρ → ∞ наведені вище формули та умови для суцільної кругової області справедливі і для цієї необмеженої області. При цьому з формули (27) для u при ρ → ∞ випливає досить жорстка інтегральна умова суцільності для радіальних деформацій

$$\int_0^\infty e_r d\rho = 0 .$$

Проінтегрувавши формулу (27) для u по ρ в межах від 0 до ∞, а друге рівняння (1) по φ в межах від 0 до 2π, одержимо рівності

$$\int_0^\infty u\, d\rho = -\int_0^\infty \rho\, e_r d\rho, \quad \int_0^{2\pi} u\, d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} e_\varphi d\varphi,$$

звідки відповідним інтегруванням першої рівності по φ, а другої по ρ легко одержати умову

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \rho\left(e_r + e_\varphi\right) d\rho\, d\varphi = 0$$

для сумарних поздовжніх деформацій, яка простежується і для обмежених кругових областей – суцільності та з отвором, правда, у вигляді неоднорідної інтегральної умови.

Для площини з круговим отвором, тобто для області $D=\{\rho\in[1,\infty),\varphi\in[0,2\pi]\}$, переміщення вигідно визначати за формулами

$$u = \int_\infty^\rho e_r d\eta, \; 2v = 2v(0) + \int_0^{2\pi}\left[\rho\, e_\varphi - \int_\infty^\rho e_r d\eta\right] sign(\varphi - \xi) d\xi .$$

Із останньої формули при $\varphi = 0$ отримуємо умову

$$\rho \int_0^{2\pi} e_\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_\infty^\rho e_r\, d\eta\, d\varphi$$

Для цієї області вихідне рівняння суцільності записується

$$2\rho\, e_{r\varphi} = 2\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_\infty^\rho e_r d\eta + \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\left[2v(0) + \int_0^{2\pi}\left(\rho\, e_\varphi - \int_\infty^\rho e_r d\eta\right) sign(\varphi-\xi) d\xi\right]\right\},$$

де переміщення $v(\rho,0)$ визначаються з умовами погодження

$$\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v(0)}{\rho}\right) = \rho\, e_{r\varphi}(0) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\int_\infty^\rho e_r(0) d\eta$$

і дорівнюють

$$v(0) = \int_\infty^\rho \left[\frac{\rho}{\eta} e_{r\varphi}(0) + \left(1 - \frac{\rho}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} e_r(0)\right] d\eta .$$

Для площини з круговим отвором на основі рівняння (7) можна одержати ще таку інтегральну умову:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^\infty e_r\, d\rho\, d\varphi = -\int_0^{2\pi}\left[e_r(1) - \frac{\partial e_\varphi(1)}{\partial\rho}\right] d\varphi .$$

Отже, для двовимірних неосесиметричних задач механіки деформівного твердого тіла на основі інтегрування диференціальних рівнянь суцільності Коші між деформаціями та переміщеннями в областях визначення – суцільному крузі й крузі з круговим отвором, площині та площині з круговим отвором – одержані вихідні інтегродиференціальні рівняння суцільності, які при вказаних необхідних умовах погодження переміщень з деформаціями еквівалентно зведені до відомого диференціального рівняння суцільності. При цьому виведені формули коректного визначення переміщень за відомими деформаціями з використанням умов погодження та знайдені інтегральні умови суцільності для деформацій і переміщень. Останні можуть знайти важливе застосування як критерії достовірності числових розрахунків напружено-деформованого стану деформівних тіл під час розв’язування прямих задач механіки і як необхідні умови для існування розв’язків відповідних прямих [5, 7] і обернених [8, 9] задач пружності чи термопружності.

1. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., 1975. 2. Папкович П.Ф. Теория упругости. Л. М., 1939. 3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М., 1981, 4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975. 5. Вігак В.М. Розв’язки задач пружності та термопружності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. 1995. Вип. 9. С.34–122. 6. Вігак В.М. Розв’язування плоских задач пружності та термопружності в прямокутній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1996. 9, № 1. С.19–25. 7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К., 1970. 8. Вигак В.М. Управление термпературными напряжениями и перемещениями. К., 1988. 9. Вігак В.М. Керування термопружними напруженнями в циліндрі у випадку двовимірного неосесиметричного температурного поля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1992. Вип. 36.

УДК 513.88

О. Г. Сторож
Львівський національний університет ім. І. Франка

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Використовуючи метод диференціювання розкладу одиниці, побудовано формулу обернення та рівність Парсеваля для сингулярного самоспряженого диференціально-граничного оператора.

Using differentiation of identity resolution method the inverse formula and Parseval quality for singular self-adjoint differential-boundary operator are constructed.