$i = \overline{1,n}$ нашої задачі (1)-(2) в області D, що і треба було довести.

1. В.Вольтерра. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М., 1982. 2. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М., 1967. 3. А.А. Дородницын. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений. М., 1982. 4. Желизняк И.Р. Построение решения дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром.Вест. Львов. политехн. ин-та, 1986, №202. С.63-64.

УДК 512.64

В.М. Петричкович
Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, відділ алгебри

ПРО НАПІВСКАЛЯРНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Узагальнено для довільних многочленних матриць результат П.С. Казімірського і автора про звідність многочленних матриць повних рангів напівскалярними еквівалентними перетвореннями до трикутних виглядів з інваріантними множниками на головних діагоналях.

P.S. Kazimirsky's and author's result on the reducibility of polynomial matrices of full ranks by semiscalar equivalent transformations to triangular forms with the invariant factor along the principal diagonal for any polynomial matrices is generalized.

Нехай $M(m,n,P[x])$ – множина $m \times n$ -матриць над кільцем многочленів $P[x]$ з коефіцієнтами із поля P. Нагадаємо, що матриці $A_1(x)$, $A_2(x) \in M(m,n,P[x])$ називаються *напівскалярно еквівалентними*, якщо $A_1(x) = UA_2(x)V(x)$ для деяких оборотних матриць $U \in GL(m,P)$ і $V(x) \in GL(n,P[x])$. У роботах [1,2] щодо таких перетворень встановлена спеціальна трикутна форма многочленних матриць та їх наборів над різними полями у випадку $m \le n$ і матриці є повних рангів m. У статті ці результати узагальнені для довільних матриць.

Надалі будемо позначати через $d_k^A(x)$ – найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку, $\mu_k^A(x)$ – k-ий інваріантний множник, $D^A(x)$ – канонічну діагональну форму матриці $A(x) \in M(m,n,P[x])$, тобто

$$D^A(x) = U(x)\ A(x)\ V(x) = diag\,(\mu_1^A(x), \ldots, \mu_r^A(x), 0, \ldots, 0)\,,\ \mu_r^A(x) \neq 0\,,$$

для деяких матриць $U(x) \in GL(m,P[x])$, $V(x) \in GL(n,P[x])$.

Лема 1. *Нехай* $A(x) \in M(m,n,P[x])$, $rangA(x) = r > 1$. *Якщо* $\deg d_r^A(x) < |P|$, *то існує рядок*

$$u = \|\ 1\ \ u_2\ \ldots\ u_m \|,\ u_j \in P\,,\ j = 2, \ldots, m\,,$$

такий, що

$$uA(x) = \| \, b_1(x) \ \dots \ b_n(x) \, \|, \ \text{де} \ (b_1(x), \dots, b_n(x)) = d_1^A(x).$$

Доведення. Для матриці $A(x)$ існує матриця $V(x) \in GL(n, P[x])$ така, що

$$A(x)V(x) = \begin{Vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1r}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mr}(x) & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = A_1(x).$$

Всі перші r стовпці матриці $A_1(x)$ є ненульовими. Зрозуміло, що достатньо довести лему для матриці $A_1(x)$.

Через $\delta_j(x)$ позначатимемо найбільший спільний дільник елементів j-го стовпця матриці $A_1(x)$, тобто $\delta_j(x) = (a_{1j}(x), \dots, a_{mj}(x))$, $j = 1, \dots, r$.

Многочлени $d_r^A(x) = d_r^{A_1}(x)$ і $d_1^A(x) = d_1^{A_1}(x)$ зобразимо у виглядах

$$d_r^{A_1}(x) = d_{r1}(x) \cdots d_{rr}(x), \ (d_{rs}(x), d_{rt}(x)) = 1,$$

$$d_1^{A_1}(x) = d_{11}(x) \cdots d_{1r}(x), \ (d_{1s}(x), d_{1t}(x)) = 1,$$

$$s, t = 1, \dots, r, \ s \neq t, \text{ і}$$

$$(\delta_j(x), d_{rj}(x)) = d_{1j}(x), \ j = 1, \dots, r.$$

Далі, застосовуючи леми 1,2 із [2] до наборів многочленів

$$a_{1j}(x), \dots, a_{mj}(x), \ d_{rj}(x), \ j = 1, \dots, r,$$

одержимо, що існують такі елементи $u_i \in P$, $i = 2, \dots, m$, що

$$\| \, 1 \ \ u_2 \ \dots \ u_m \, \| A_1(x) = \| \, c_1(x) \dots c_r(x) \ 0 \dots 0 \, \|,$$

де $(c_1(x), \dots, c_r(x)) = d_1^A(x)$. Цим лема доведена.

Лема 2. *Нехай* $A_i(x) \in M(m, n_i, P[x])$, $rang A_i(x) = r_i > 1$, $i = 1, \dots, k$. *Якщо* $\sum_{i=1}^{k} \deg d_{r_i}^{A_i}(x) < |P|$, *то існує рядок*

$$u = \| \, 1 \ \ u_2 \ \dots \ u_m \, \|, \ u_j \in P, \ j = 2, \dots, m,$$

такий, що

$$uA_i(x) = \| \, b_1^{(i)}(x) \ \dots \ b_{n_i}^{(i)}(x) \, \|, \ \text{де} \ (b_1^{(i)}(x), \dots, b_{n_i}^{(i)}(x)) = d_1^{A_i}(x).$$

Доведення проводиться за індукцією.

Теорема. *Нехай задано набір матриць*

$$A_1(x), \dots, A_k(x), \ A_i(x) \in M(m, n_i, P[x]), \ i = 1, \dots, k \tag{1}$$

$rang A_i(x) = r_i$. *Якщо* $\sum_{i=1}^{k} \deg d_{r_i}^{A_i}(x) < |P|$, *то існують верхня унітрикутна матриця* $U \in GL(m, P)$ *і матриці* $V_i(x) \in GL(n_i, P[x])$ *такі, що*

$$UA_i(x)V_i(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc} \mu_1^{A_i}(x) & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^{(i)}(x)\mu_1^{A_1}(x) & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_i-1\,1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \dots & \mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & & 0 & \dots & 0 \\ a_{r_i\,1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \dots & a_{r_i\,r_i-1}^{(i)}(x)\mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & a_{r_ir_i}^{(i)}(x)\mu_{r_i}^{A_i}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(i)}(x)\mu_1^{A_i}(x) & \dots & a_{m\,r_i-1}^{(i)}(x)\mu_{r_i-1}^{A_i}(x) & a_{mr_i}^{(i)}(x)\mu_{r_i}^{A_i}(x) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \qquad (2)$$

де $\left(a_{r_ir_i}^{(i)}(x), a_{r_i+1\ r_i}^{(i)}(x), \dots, a_{m\ r_i}^{(i)}(x)\right) = 1$, $i = 1, \dots, k$.

Доведення. Нехай $k = 1$, тобто набір (1) складається з однієї матриці $A(x) \in M(m, n, P[x])$. На підставі леми 1 існують матриці

$$U_1 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & u_2 & \dots & u_m \\ 0 & & I_{m-1} & \end{array} \right\|, \ u_i \in P, \ i = 2, \dots, m,$$

I_{m-1} – одинична матриця порядку $m-1$ і $V_1(x) \in GL(n, P[x])$ такі, що

$$U_1 A(x) V_1(x) = \left\| \begin{array}{cccc} \mu_1^A(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(x)\mu_1^A(x) & & & \\ \vdots & & A_{m-1\ n-1}(x) & \\ a_{m1}(x)\mu_1^A(x) & & & \end{array} \right\| = A_1(x).$$

Тут і надалі $A_{pq}(x)$ означає матрицю із $M(p, q, P[x])$. Тепер проводимо аналогічні міркування над матрицею $A_{m-1\ n-1}(x)$ і т.д., поки не одержимо матрицю $A_{r-1}(x)$, в якій у нижньому правому куті є матриця $A_{m-(r-1)\ n-(r-1)}(x)$ рангу 1. Тоді для неї існує матриця $W(x) \in GL(n-(r-1), P[x])$ така, що

$$A_{m-(r-1)\ \ n-(r-1)}(x)\ W(x) = \left\| \begin{array}{cccc} b_{rr}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{mr}(x) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Неважко переконатися, що елементи $b_{ir}(x)$ мають вигляд

$$b_{ir}(x) = a_{ir}(x)\, \mu_r^A(x), \ i = r, r+1, \dots, m,$$

де $(a_{rr}(x), \dots, a_{mr}(x)) = 1$. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай набір матриць (1) такий, що* $rang A_i(x) = m$, $i = 1, \dots, k$. *Якщо* $\sum_{i=1}^{k} \deg d_m^{A_i}(x) < |P|$, *то існують верхня унітрикутна матриця* $U \in GL(m, P)$ *і матриці* $V_i(x) \in GL(n_i, P[x])$ *такі, що* $UA_i(x)V_i(x) = T_i(x)\, D^{A_i}(x)$, *де* $T_i(x)$ *– нижні унітрикутні матриці із* $GL(m, P[x])$, $i = 1, \dots, k$.

Наприкінці зауважимо, що у випадку нескінченного поля P, кожний нобір матриць (1) напівскалярно еквівалентний до набору матриць трикутного вигляду (2).

1. Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. 1977. С. 61–66. 2. Петричкович В. М. О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1987. Вып. 26. С. 13 - 16.

УДК 519. 21.

О. С. Гаврилів, Б. С. Остапович, Т. В. Іванел
Національний університет “Львівська політехніка” ; кафедра прикладної математики

ДО ПИТАННЯ СЛАБКИХ РОЗПОДІЛІВ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Сепарабельний гільбертів простір розбивається в декартів добуток гільбертових підпросторів, на кожному з яких запроваджуються ймовірнісні розподіли. Доводиться, що сукупний розподіл на вихідному гільбертовому просторі буде слабким розподілом специфічної конструкції.

Separable Hilberts area separates in decart multiplade Hilberts under-areas on each of them is possible distribution. It is proved that these devision on start Hilbert area will be weak distribution of spesific construction.

Розглянемо дійсний гільбертів сепарабельний простір H зі скалярним добутком $<\cdot,\cdot>$ та ортонормованим базисом $\{e_n\}$. Базис $\{e_n\}$ вважаємо безумовним [1].

Лема. Сепарабельний дійсний гільбертів простір можна розбити на декартів добуток l сепарабельних гільбертових просторів з базисами, об’єднання яких становить базис розбиваного простору.

Доведення. Розіб’ємо базис $\{e_n\}$ гільбертового простору H на підбазиси $\{e_{n_i}\}, i=\overline{1,l}$ і розглянемо лінійні оболонки послідовностей лінійно-незалежних елементів $\{e_{n_i}\}$, $i=\overline{1,l}$. Отже, ми визначили сукупність ортопроекторів P_i, $i=\overline{1,l}$, кожен з яких проектує на відповідну лінійну оболонку якогось $\{e_{n_i}\}$, $i=\overline{1,l}$.

Для скінченно-вимірних лінійних оболонок лема справджується очевидно.

Нехай $\{e_{n_k}\}$ і $\{e_{n_m}\}$ – сепарабельні підбазиси базису $\{e_n\}$. Тоді, $\forall\, x \in H$

$$P_k x = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\, e_{j_k}\,, P_m x = \sum_{j=1}^{\infty} a_{mj}\, e_{j_m}\,, \tag{1}$$

Оскільки для $\{e_n\}$ виконується рівність Парсеваля, то для x, $|x| < \infty$ як для доданків суми $< x, x >= |x|^2$, тобто лему треба вважати доведеною і для випадку розбиття базису $\{e_n\}$ на зчисленні підбазиси.