

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МІКРОСМУЖКОВИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВОГО ПІДХОДУ

© Андрійчук М.І., 2008

Методом поверхневих інтегральних рівнянь виконано строгий електродинамічний аналіз відкритих мікросмужкових неоднорідностей. Підхід передбачає застосування функцій Гріна півпростору у разі діелектричної багатошарової підкладки. Для числового розв'язування відповідних інтегральних рівнянь використовується метод Гальоркіна. Елементи отриманої імпедансної матриці розраховуються аналітико-числовим інтегруванням. Характеристичні параметри структури визначаються за відомими елементами матриці.

The full-wave electrodynamic analysis of open microwave discontinuities is performed by space domain integral equation approach. This approach employs the dyadic Green's functions for grounded multi-layer dielectric configuration and can be used for single or multi-layer dielectric with or without substrate. The Galerkin's method is used for numerical solving the respective integral equations. Elements of received impedance matrix are calculated by combination of analytical and numerical integration. The characteristic network parameters of structure are determined by the matrix elements.

Вступ

Мікросмужкові елементи використовуються часто як складова частина багатьох мікроелектромеханічних систем (МЕМС) [1, 2]. Для того, щоб описати особливості і характеристики МЕМС, необхідно точно врахувати електромагнітні властивості мікросмужкового включення. Як правило, такі елементи мають форму Т-неоднорідностей, кутову геометрію, стрибкоподібну зміну ширини тощо. Квазістатичні і дисперсійні моделі, які використовувались на початковому етапі дослідження цих систем, не забезпечували необхідної точності у визначенні електромагнітного поля мікросмужкової структури, що не давало можливості вивчати властивості системи загалом [3, 4]. Це пояснюється тим, що квазістатичні моделі передбачають поширення ТЕМ-хвилі, і характеристичні параметри визначаються обчисленням статичних ємності та індуктивності. Дисперсійні моделі будуються напівемпірично і на їхній основі можна отримати інформацію тільки про частотні характеристики мікросмужкового елемента. Квазістатичні і дисперсійні моделі стають непридатними у разі зростання частоти, їх можна використовувати тільки для низькочастотного діапазону. У зв'язку з цим застосування строгого електродинамічного аналізу, який забезпечує вичерпний опис поведінки електромагнітного поля поблизу мікросмужкової частини МЕМС [5], є надзвичайно актуальним. Незважаючи на те, що строгі моделі є доволі складними і потребують великої кількості комп'ютерних розрахунків, вони є найпридатнішими для високих частот.

Строга електродинамічна модель мікросмужкової неоднорідності

Мікросмужковий елемент у формі Т-неоднорідності використовується дуже часто у багатьох практичних застосуваннях та електронних пристроях. Типову геометрію такого елемента зображено на рис. 1.

Електродинамічний аналіз із застосуванням функції Гріна є першим етапом для детального опису поведінки електромагнітного поля в мікросмужковій структурі [6]. Інтегральне подання компоненти \vec{E} електромагнітного поля може бути отримане з використанням рівнянь Максвелла в стандартній формі

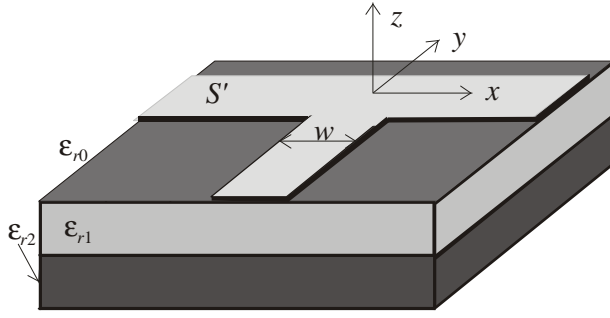


Рис. 1. Геометрія мікросмужкової T-неоднорідності з двошаровою підкладкою

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega \epsilon_r \vec{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{H}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3)$$

(часова залежність передбачається у формі $e^{i\omega t}$), і рівняння Гельмгольца для функції Гріна

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{G} = \mu_0 \vec{J} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4)$$

Використовуючи подання для векторного потенціалу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \mu_0 \vec{G} \cdot \vec{J} dV' \quad (5)$$

і рівняння (4), отримаємо формулу для компоненти електричного поля

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V (k_i^2 \vec{I} + \nabla \nabla) G_i \cdot \vec{J} dV', \quad (6)$$

де струм \vec{J} є зосереджений на провідній смужці S' . На основі цього факту інтегральне рівняння (6) може бути переписане у формі поверхневого інтеграла

$$\vec{E}(x, y, z) = \iint_{S'} [k_i^2 \vec{I} + \nabla \nabla] G_i(x, y, z; x', y', z') \cdot \vec{J}(x', y') dS', \quad (i=1, 2), \quad (7)$$

де k_i – хвильові числа, $G_i(x, y, z; x', y', z')$ – функція Гріна в області i .

Струм $\vec{J}(x', y')$ в (7) є двовимірним і зосереджується в площині неоднорідності, у зв'язку з цим він може бути записаний як

$$\vec{J}(x', y') = J_x(x', y') \vec{x} + J_y(x', y') \vec{y}. \quad (8)$$

Загалом, функція Гріна, яка відповідає задачі про відкриту мікросмужкову систему з довільною кількістю шарів (стосовно геометрії на рис. 1), подається у формі інтеграла Зоммерфельда і записується так [7]

$$G_{\xi\xi}(x, y, z; x', y', 0) = \frac{\omega \mu_0}{2\pi k_0^2} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) Z_{\xi\xi}(z) \frac{N_{\xi\xi}(\lambda)}{f_1(\lambda)} d\lambda, \quad (9a)$$

$$G_{z\xi}(x, y, z; x', y', 0) = \frac{\omega \mu_0}{2\pi k_0^2} \Phi(\varphi) \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) Z_{z\xi}(z) \frac{N_{z\xi}(\lambda)}{f_1(\lambda) f_2(\lambda)} d\lambda, \quad (9b)$$

де $\xi = x, y$, $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $\Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos \varphi, & \xi = x, \\ \sin \varphi, & \xi = y. \end{cases}$

Функції $N_{\xi\xi}(\lambda), N_{z\xi}(\lambda)$ залежать від λ і геометричних параметрів мікросмужкової структури.

Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок одношарової підкладки. Використовуючи відоме подання функцій $J_0(\lambda \rho)$ і $J_1(\lambda \rho)$ за функціями $H_0^{(1)}(\lambda \rho)$ і $H_1^{(1)}(\lambda \rho)$, можна перетворити півбезмежне інтегрування у формулі (9) на інтегрування по всій осі та отримати остаточний вираз функцій G_{xx}, G_{yy}, G_{xz} та G_{yz} у вільному півпросторі ($z > 0$)

$$G_{xx} = G_{yy} - \frac{i\omega \mu_0}{4\pi k_0^2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(\lambda \rho) e^{-u_0 z} \frac{\sinh(iu_1 \lambda)}{f_1(\lambda)} \lambda d\lambda, \quad (10a)$$

$$G_{zx} = \text{tg } \varphi G_{zy} = -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi k_0^2} (1 - \epsilon_r) \cos \varphi \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(\lambda \rho) e^{-u_0 z} \frac{\sinh(iu_1 h) \cos(iu_1 h)}{f_1(\lambda) f_2(\lambda)} \lambda^2 d\lambda, \quad (10b)$$

де $u_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $u_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$,

$$f_1(\lambda) = u_0 \sinh(iu_1 h) + u_1 \cosh(iu_1 h), \quad (11a)$$

$$f_2(\lambda) = \varepsilon_r u_0 \cosh(iu_1 h) + u_1 \sinh(iu_1 h). \quad (11b)$$

Формули (7)–(10) дають можливість отримати розв'язок електродинамічної задачі для цієї мікросмужкової структури.

Дискретизація задачі та отримання імпедансної матриці

Рівняння (7) не може бути розв'язане аналітично для мікросмужкових систем зі складною геометрією. У зв'язку з цим використовується метод Гальоркіна, який часто застосовується для розв'язування задач електродинаміки, розсіювання, синтезу антен, аналізу електронних кіл [8–10].

Відповідно до методу Гальоркіна прямокутна область, яка містить мікросмужкову неоднорідність, ділиться на малі прямокутники (рис. 2). Аналогічний вигляд має сітка і в напрямку осі y . Струм $J(x', y')$ подається як суперпозиція відомих базових функцій з невідомими коефіцієнтами

$$J_x(x', y') = \sum_{nx=1}^{N_x+1} \sum_{mx=1}^{M_x+1} I_x^{nm} f_{nx}(x') g_{mx}(y'), \quad (12a)$$

$$J_y(x', y') = \sum_{ny=1}^{N_y+1} \sum_{my=1}^{M_y+1} I_y^{nm} f_{ny}(y') g_{my}(x'), \quad (12b)$$

де пари (nx, mx) і (ny, my) вказують на вузли в сітці для струмів по осях x і y відповідно.

Функції $f_{n\xi}(\xi')$ подають поздовжню залежність кожної компоненти у формі

$$f_{n\xi}(\xi') = \begin{cases} \frac{\sin k_s (\xi_{n\xi+1} - \xi')}{\sin kl_\xi}, & \xi_{n\xi} \leq \xi' \leq \xi_{n\xi+1}, \\ \frac{\sin k_s (\xi' - \xi_{n\xi-1})}{\sin kl_\xi}, & \xi_{n\xi-1} \leq \xi' \leq \xi_{n\xi}, \\ 0, & \xi' > \xi_{n\xi+1}, \xi' < \xi_{n\xi-1}. \end{cases} \quad (\xi, \eta) = (x, y), (y, x), \quad (13a)$$

а функції $g_{m\xi}(\xi')$ подають поперечну залежність у формі

$$g_{m\xi}(\xi') = \begin{cases} 1, & \xi_{m\xi} \leq \xi' \leq \xi_{m\xi+1}, \\ 0, & \xi' > \xi_{m\xi+1}, \xi' < \xi_{m\xi}. \end{cases} \quad (\xi, \eta) = (x, y), (y, x). \quad (13b)$$

У (13) $l_\xi = \xi_{n\xi+1} - \xi_{n\xi}$, k_s – нормуюче хвильове число, яке змінюється між k_0 і k_1 . Підставляючи формули (12), (13) у рівняння (7), одержимо такі формули

$$E_x + \Delta E_x = \sum_{nx=1}^{N_x+1} \sum_{mx=1}^{M_x+1} I_x^{nm} \iint_{S'} K_{xx}(x, y; x', y') f_{nx}(x') g_{mx}(y') dx' dy' + \sum_{ny=1}^{N_y+1} \sum_{my=1}^{M_y+1} I_y^{nm} \iint_{S'} K_{xy}(x, y; x', y') f_{ny}(y') g_{my}(x') dx' dy', \quad (14a)$$

$$E_y + \Delta E_y = \sum_{nx=1}^{N_x+1} \sum_{mx=1}^{M_x+1} I_x^{nm} \iint_{S'} K_{yx}(x, y; x', y') f_{nx}(x') g_{mx}(y') dx' dy' + \sum_{ny=1}^{N_y+1} \sum_{my=1}^{M_y+1} I_y^{nm} \iint_{S'} K_{yy}(x, y; x', y') f_{ny}(y') g_{my}(x') dx' dy', \quad (14b)$$

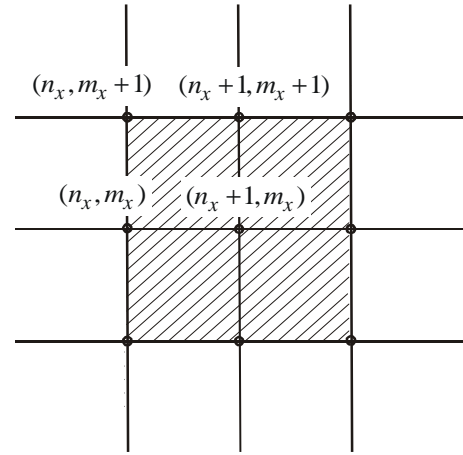


Рис. 2. Сітка в околі кутової неоднорідності вздовж осі x

де $K_{\xi\eta}(x, y; x', y')(\xi, \eta = x, y)$ – інтегродиференціальні оператори виду

$$K_{\xi\eta}(x, y; x', y') = \int_0^{\infty} [(k_i^2 \delta_{\xi\eta} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}) F_{\xi\eta} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} F_{z\xi}] d\lambda. \quad (15)$$

Функції $F_{\xi\eta}$ і $F_{z\xi}$ подаються з допомогою $J_0(\lambda\rho), J_1(\lambda\rho), f_1(\lambda)$ та $f_2(\lambda)$ [11].

Застосування методу Гальоркіна зводить рівняння (14) до матричного рівняння

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{I}] = [\mathbf{V}], \quad (16)$$

де \mathbf{Z} – квадратна матриця (так звана імпедансна матриця), і в термінах підматриць вона може бути записана так

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} [Z_{xx}] & [Z_{xy}] \\ [Z_{yx}] & [Z_{yy}] \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Елементи підматриць $[Z_{xx}]$ подаються такими скалярними добутками

$$Z_{xx}(n, m; \nu, \mu) = \langle f_{nx}(x') g_{mx}(y'), K_{xx}, f_{\nu x}(x) g_{\mu x}(y) \rangle, \quad (18)$$

де пари $(\nu\xi, \mu\xi)(\xi = x, y)$ вказують пробні точки. Елементи Z_{xy}, Z_{yx}, Z_{yy} записуються аналогічно до (18). Подвійний скалярний добуток у (18) визначається двома подвійними інтегруваннями

$$\langle f_{nx}(x') g_{my}(y'), K_{xx}, f_{\nu x}(x) g_{\mu x}(y) \rangle = \iint_{S'} dx' dy' \iint_S dx dy (f_{n\xi} g_{m\xi} K_{\xi\eta} f_{\nu\eta} g_{\mu\eta}), \quad (19)$$

де S і S' являють собою тестові і базові точки відповідно. За аналогією до вищевказаного, елементи вектора збудження

$$[\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} [V_x^{\nu\mu}] \\ [V_y^{\nu\mu}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

обчислюються як

$$V_x^{\nu\mu} = \iint_S (E_x(x, y) f_{\nu x} g_{\mu x}) dx dy, \quad (21a)$$

$$V_y^{\nu\mu} = \iint_S (E_y(x, y) f_{\nu y} g_{\mu y}) dx dy. \quad (21б)$$

Визначення характеристичних параметрів

Електричні струми $I_{x,y}^{nm}$ є розв'язками матричного рівняння, отриманого із застосуванням методу Гальоркіна

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Z}]^{-1} [\mathbf{V}]. \quad (22)$$

Характеристичні параметри можуть бути розраховані за розподілами струмів із застосуванням теорії довгих ліній [12] у припущенні одномодового режиму в мікросмузжковій збуджуючій системі. Мікросмузжковий елемент розглядається як N-портове коло з напругами і струмами, пов'язаними співвідношенням

$$V_n = \sum_{m=1}^N Z_{nm} I_m \quad (n=1, 2, \dots, N), \quad (23)$$

де елементи Z_{nm} – характерні імпеданси, або Z – параметри. З рівняння (23) випливає, що вхідний імпеданс в n -му порті є

$$Z_{inn} = \sum_{m=1}^N Z_{nm} \left(\frac{I_m}{I_n} \right). \quad (24)$$

Параметри розсіювання $[S]$ можуть бути обчислені за Z -параметрами за відомим матричним рівнянням

$$[S] = ([Z] - [I])([Z] + [I])^{-1}. \quad (25)$$

Загальні втрати випромінювання визначаються за параметрами розсіювання згідно з формулою

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}} = 1 - \sum_{m=1}^N |S_{m1}|^2. \quad (26)$$

Втрати випромінювання часто визначаються за допомогою параметра G , що обчислюється як

$$G = 1 - \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}} = \sum_{m=1}^N |S_{m1}|^2. \quad (27)$$

У разі двопортової неоднорідності (прямокутні згини, смужки), коли кількість портів збудження може бути зведена до двох і завдяки симетрії системи Z -параметри можуть бути записані у такій компактній формі

$$Z_{11} = \frac{Z_{\text{in}}^{\text{le}} + Z_{\text{in}}^{\text{lo}}}{2}, Z_{22} = Z_{11}, \quad (28a)$$

$$Z_{12} = \frac{Z_{\text{in}}^{\text{lo}} - Z_{\text{in}}^{\text{le}}}{2}, Z_{21} = Z_{12}, \quad (28b)$$

де $Z_{\text{in}}^{\text{le,o}}$ – вхідний імпеданс порту 1 при парному (непарному) збудженні. Парне збудження відповідає еквівалентним джерелам в обох портах, а непарне – джерелам з однаковою амплітудою і різницею фаз 180° .

Параметри розсіювання для цього випадку є такими

$$S_{11} = \frac{Z_{11}^2 - 1 - Z_{12}^2}{D}, S_{22} = S_{11}, \quad (29a)$$

$$S_{12} = \frac{2Z_{12}}{D}, S_{21} = S_{12}, \quad (29b)$$

де $D = Z_{12}^2 + 2Z_{11} - Z_{12}^2$, а загальні втрати збудження розраховуються як

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}} = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2. \quad (30)$$

Перераховані вище параметри характеризують ефективність мікросмужкової лінії і використовуються найчастіше як оптимізаційні для покращання властивостей випромінювання у робочому діапазоні частот.

Особливості числового моделювання

Для обчислення вищеперахованих характеристичних параметрів з достатньою для практичних застосувань точністю необхідно мати точно визначені елементи $Z_{\xi\eta nm}^{\nu\mu}(\xi, \eta = x, y)$ у (17), що вимагає значної кількості аналітичних і числових розрахунків. Елементи $Z_{\xi\eta nm}^{\nu\mu}$ містять чотирикратні поверхневі інтеграли, а також інтеграли Зоммерфельда по півбезмежній осі у функціях Гріна. Загалом проблема обчислення таких інтегралів виникає у багатьох практичних застосуваннях (див., наприклад, [13–15]). Теоретична частина такого підходу детально описана у [16] для дифракційних задач з різною геометрією. Для точного обчислення інтегралів у (17) необхідно поєднати аналітичний [16] та аналітико-числовий підхід [17], і вибрати для конкретного набору фізичних параметрів той, який забезпечує вищу точність обчислень.

Підхід [16] передбачає перетворення півбезмежного інтегрування вздовж додатної дійсної півосі до безмежного інтегрування з використанням відомої формули [18]

$$J_0(\lambda\rho) = \frac{1}{2}[H_0^{(1)}(\lambda\rho) + H_0^{(2)}(\lambda\rho)]. \quad (31)$$

У нашому випадку інтегрування функції Гріна зводиться до інтеграла (10).

Інтегрування по λ здійснюється насамперед, інтегруванням по поверхневих координатах x, x' і y, y' є наступним [19]. Якщо перше інтегрування реалізовано точно, тоді ми повинні використати відповідне числове інтегрування на другому етапі з метою отримання результатів з не меншою точністю. Крім того, при підході [16] необхідно здійснювати деформацію стандартних віток розрізів і здійснювати інтегрування по цих деформованих вітках. Як правило, така деформація здійснюється для середовищ з втратами. Типовий шлях інтегрування для такого середовища показано на рис. 3. У цьому випадку ми повинні деформувати розрізи так, щоб шлях інтегрування не перетинав лінії, яка з'єднує полюси (точки k_1 і k_2).

Підхід, запропонований у [19], передбачає передусім розбиття півбезмежного інтегрування вздовж дійсної осі на дві частини [20]:

1. Числове інтегрування по проміжку $[0, A]$, де значення параметра A визначається з рівняння

$$\coth((A^2 - k^2)^{1/2} h) = 1. \quad (32)$$

2. Комбінація числового та аналітичного інтегрування по залишковому проміжку $[A, \infty]$.

Інтегрування у першому пункті відбувається у два етапи:

1а. Числове інтегрування по проміжку $[0, k_0]$.

1б. Процедура урахування особливостей (полюсів) на проміжку $[k_0, k]$, яка перетворює інтеграл на суму безмежного ряду та інтеграл від повільно змінної функції.

1в. Числове інтегрування у межах проміжку $[k, A]$ здійснюється за аналогією з пунктом 1а.

Розглянутий вище підхід дає змогу максимально використовувати симетрію, характерну для відкритої мікросмужкової системи. Крім того, коли дискретизація реалізована таким способом, різні мікросмужкові елементи, розміщені на тій самій поверхні, можуть бути проаналізовані без перерахування елементів імпедансної матриці. Для кожного мікросмужкового елемента існує доволі проста процедура, яка коректно заповнює імпедансну матрицю відповідно до форми неоднорідності і відомих граничних умов. У зв'язку з цим, якщо розрахунки виконують для елементів з різними фізичними характеристиками, елементи імпедансної матриці можуть бути розраховані попередньо і розміщені у спеціальній базі даних з метою їхнього використання при зміні цих характеристик. Однак зазначимо, що для задач із великою розмірністю розв'язання системи лінійних рівнянь може вимагати більше часу, ніж формування елементів матриці, і використання даних сформованої бази не буде приводити до значного скорочення часу обчислень.

Зображена на рис. 2 дискретизаційна сітка містить $(N_i M_i), (i = x, y)$ пар вузлів і вимагає $(N_x M_x)^2 + (N_y M_y)^2$ операцій при обчисленні елементів (Z_{xx}, Z_{yy}) прямої взаємодії і $(N_x M_x N_y M_y)$ операцій для перехресних елементів (Z_{xy}, Z_{yx}) . Однак ця кількість може бути істотно зменшена завдяки симетрії і властивостям парності-непарності. З рівнянь (19)–(20) випливає, що просторова залежність у прямих членах є парною функцією величин $(x - x')$ і $(y - y')$, а елементи перехресної взаємодії є непарними функціями цих величин. Тому елементи матриці можуть бути визначені з урахуванням цих властивостей, що дає значну економію обчислювальних витрат. Кількість елементів, які обчислюються для підматриці Z_{ij} , зводиться до

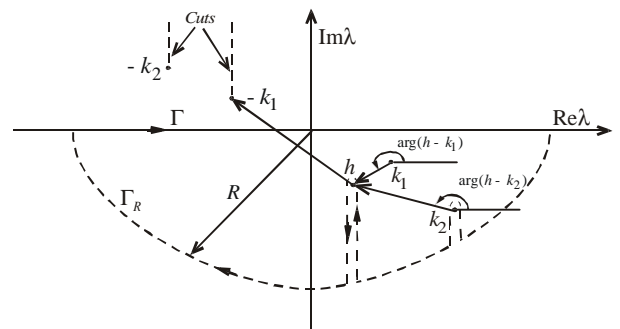


Рис. 3. Інтегрування в λ -площині для середовищ з втратами

$N_i M_j, (i, j = x, y)$, що є квадратним коренем з попередньо необхідної кількості обчислень. Загальна матриця $[Z]$ є матрицею Тепліца з діагонально переважаючими елементами. Збільшення розмірності матриці також дає можливість врахувати вплив близько розміщених вузлів.

Висновки

Здійснено строгий електродинамічний аналіз і розроблені алгоритми для задачі розрахунку і оптимізації параметрів мікросмужкової неоднорідності, які уможливають дослідження в широкому частотному діапазоні. Числові розрахунки показують, що для отримання розв'язків прямої електродинамічної задачі з точністю 10 % необхідно враховувати 15–20 членів у розкладі (12). При збільшенні частоти електромагнітного поля розмірність матриці швидко зростає, що приводить до того, що час розв'язання рівняння (16) стає співмірним з часом обчислення елементів імпедансної матриці.

1. Lyshevski S.E. *MEMS and NEMS: Systems, Devices and Structures* CRC Press, Boca Raton, FL. – 2002. 2. Rebeiz G.M., *FR MEMS. Theory, Design and Technology*. – New York: Wiley, 2003. 3. Benedec P. and Silvester P. *Equivalent Capacitance of Microstrip Gaps and Steps* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Nov. 1972. – Vol. MTT-20. – P. 729–733. 4. Gupta C., Copinath A. *Equivalent Circuits Capacitance for Right-Angle-Bends, T-junctions, and Crossings* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Oct. 1977. – Vol. MTT-25. – P. 819–821. 5. Wertgen W., Jansen R.H. *Efficient Direct and Iterative Electrodynamics analysis of Geometrically Complex Irregular MIC and MMIC-Structures* // *Int. Journal of Numerical Modeling*. – Sept. 1989. – P. 153–186. 6. Beyne L., de Zutter D. *Green's Function for Layered Lossy Media with Special Application to Microstrip Antenna* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – May 1988. – Vol. MTT-36. – P. 875–881. 7. Elliott R.S. *The Green's function for electric dipoles parallel to and above or within a grounded dielectric slab* – *Hughes Technical Correspondence*. – Michigan University, 1978. 8. Harrington R.F. *Field Computation by Moment Method*. – New York: Macmillan, 1968. 9. Nam S., Ling H., Itoh T. *Characterization of Uniform Microstrip Line and Its Discontinuities Using the Time-Domain Method of Lines* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Dec. 1989. – Vol. MTT-37. – P. 2051–2057. 10. Sheen D.M., Ali S.M., Abouzahra M.D., Kong J.A. *Application of the Three-Dimensional Finite-Difference Method to the Analysis of Planar Microstrip Circuits* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – July 1990. – Vol. MTT-38. – P. 849–857. 11. Harokopus W.P. *High Frequency Characterization of Open Microstrip Discontinuities*, Ph. D. Thesis. – University of Michigan, Radiation Laboratory. – June, 1991. – 138 p. 12. Фальковский О. И. *Техническая электродинамика*. – М., 1978. 13. Parhami P., Rahmat-Samii Y., and Mittra R. *An Efficient Approach for Evaluating Sommerfeld Integrals Encountered in the Problem of a Current Element Radiating over Lossy Ground* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Jan. 1980. – Vol. MTT-28. – P. 100–104. 14. Katehi P.B. and Alexopoulos N.G. *Real Axis Integration of Sommerfeld Integrals with Applications to Printed Circuit Antennas* // *J. Math. Physics*. – March, 1983. – Vol. 24. – P. 527–533. 15. Veerman J.A.C., Rusch J.J. and Urbach H.P. *Calculation of the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral by exact integration of the fast oscillating factor* // *J. Opt. Soc. Am.* – Apr. 2005. – Vol. 22. – P. 636–646. 16. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. *Возбуждение электромагнитных волн*. – М., 1983. 17. Harokopus W.P. and Katehi P.B. *Characterization of Microstrip Discontinuities on Multilayer Dielectric Substrates Including Radiation Losses* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Dec. 1989. – Vol. MTT-37. – P. 2058–2066. 18. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и М. Стюган. – М., 1979. 19. Andriychuk M.I., Hemour S. *Evaluation of impedance matrix elements for microstrip T-junction discontinuity* // *Proc. of XIIth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2007)*. – Lviv, Ukraine, 17–21 September, 2007. – P. 54–58. 20. van Deventer T.E., Katehi P.B., Cangellaris A.C. *An Integral Equation Method for the Evaluation of Conductor and Dielectric Losses in High Frequency Interconnectors* // *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.* – Dec. 1989. – Vol. MTT-37. – P. 1964–1971.