

УДК 621.9.048.6

Топільницький В.Г.

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра “Електронне машинобудування”

**МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ШАРУ СЕРЕДОВИЩА
РОБОЧОГО КОНТЕЙНЕРА ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ
ОБ’ЄМНОЇ ОБРОБКИ ВИРОБІВ**

© Топільницький В.Г., 2000

У статті описано математичну модель руху шару середовища робочого контейнера вібромашини об’ємної обробки виробів. Наведена система диференціальних рівнянь руху моделі середовища для резонансного та нерезонансного випадків та її розв’язок.

In this activity the mathematical model of motion of bed of a medium of the working container of the vibrational machine of volumetric handling of details is adduced. The system of differential equations of motion of model of a medium for not resonance and resonance cases and also the solution is adduced.

Актуальною проблемою під час дослідження роботи вібраційних машин об’ємної обробки виробів є розроблення математичного апарату руху середовища робочого контейнера (суміші деталей та оброблюваних тіл). Існує декілька підходів до вирішення вказаної проблеми, зокрема: а) гіпотеза руху середовища, як абсолютно твердого тіла, що розміщене в робочому контейнері із люфтом [1]; б) розгляд руху середовища як рідини в резервуарі, що вібрує [2]; в) хаотичний рух частинок у робочому контейнері тощо. У статті пропонується гіпотеза руху середовища контейнера як рух деякого однорідного суцільного середовища [3], що представляється як нашарування плоских пружно-пластичних балок, товщина яких значно менша від ширини і які контактують з стінками контейнера пружно або як шарнірно закріплені балки. Припускаючи, що матеріал середовища задовольняє нелінійний закон Фохта [4], маємо

$$\sigma = E \cdot \zeta + k_0 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^{\nu}, \quad (1)$$

де σ – нормальне напруження в шарі завантаження; $\zeta = \frac{\partial u}{\partial x}$ – відносна деформація шару завантаження; $u = u(x, t)$ – переміщення вздовж осі x довільного поперечного січення моделі середовища за деякий момент часу t ; E – модуль пружності середовища; k_0 – стала, що характеризує в’язкі властивості середовища; ν – показник нелінійності. Нелінійну силу демпфування вважатимемо такою, що задовольняє закон Болотіна [5] $(B_0 + B u^2) u_t$, де B_0 , B – деякі сталі.

Запишемо диференціальне рівняння руху середовища у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^k = f(t) + u_t (\xi + \delta u^2) \quad (2)$$

де $\alpha^2 = \frac{E \cdot F}{\rho \cdot F}$, $\beta = \frac{k_0 \cdot F}{\rho \cdot F}$, $\xi = \frac{B_0}{\rho \cdot F}$, $\delta = \frac{B}{\rho \cdot F}$, F – площа поперечного перерізу шару моделі середовища; ρ – еквівалентна густина моделі середовища, $f(t)$ – інерційне навантаження, яке для спрощення розрахунків приймаємо гармонійного типу з амплітудою b і частотою μ , тобто $f(t) = b \sin \mu t$.

Під час розгляду рівняння (2) вважатимемо, що β , ξ , δ і $b \ll \alpha^2$, тобто інерційна сила, сила в'язкого тертя і сила демпфування є малими величинами. Вказані припущення дають змогу записати рівняння (2) у вигляді

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxt}),$$

де $F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxt}) = \left[(u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \mu t \right]$, (3)

$$\varepsilon = \frac{k_0}{\rho} \ll 1.$$

Рівняння (3) будемо розглядати для простоти за крайових умов вигляду

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (4)$$

де l – довжина моделі середовища.

Ці крайові умови відповідають умовам контакту середовища з контейнером як шарнірно закріплені балки.

Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки [6], розглянемо незбурене рівняння, яке відповідає (3), тобто рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0. \quad (5)$$

Відокремлюючи в (5) змінні згідно з $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ для знаходження $X(x)$ і $T(t)$, маємо звичайні лінійні диференціальні рівняння

$$X''(x) + \frac{1}{\alpha^2} \lambda X(x) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda T = 0, \quad (7)$$

де λ – параметр, який буде визначений нижче, виходячи з крайових умов.

Функція $X(x)$ в (6), як випливає з (5) повинна задовольняти крайові умови

$$X(x)|_{x=0} = X(x)|_{x=l} = 0. \quad (8)$$

З врахуванням останнього, параметр λ і розв'язки рівняння (5) записують у вигляді [4]

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}$$

$$u = \sum_k X_k(x) \bar{T}_k \cos \omega_k t, \quad X_k = \bar{X}_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

де \bar{X}_k і \bar{T}_k – сталі.

Як відомо [7], в реальних механічних системах з багатьма ступенями вільності, а також у системах з розподіленими параметрами наявність сил тертя (як зовнішніх, так і внутрішніх) призводить до швидкого вгамовування високочастотних коливань і встановлення коливань з якоюсь однією частотою. Через це у вказаних системах доцільно розглянути так звані одночастотні режими коливань [7]. Останнє значною мірою полегшує методику дослідження збуреного рівняння (3). Тому прийемо за одночастотні розв'язки незбуреного рівняння співвідношення

$$u(x, t) = a \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \cdot \cos(\omega t + \theta), \quad \tilde{X}(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (10)$$

де $\omega = \alpha \frac{\pi}{l}$, а і θ – сталі. ($a = \bar{X}_k \cdot \bar{T}_k$)

Згідно з [6,7] співвідношення (10) також вважатимемо розв'язком збуреного рівняння, для якого а і θ будуть вже функціями часу t , тобто розв'язок збуреного рівняння шукатимемо у вигляді

$$u(x, t) = a(t)\tilde{X}(x) \cos(\omega t + \theta(t)), \quad (11)$$

де $a(t)$ і $\theta(t)$ визначаються із диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{\sin \psi}{\omega p} \int_0^l \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx; \\ \dot{\theta} = \varepsilon \frac{\cos \psi}{\omega a p} \int_0^l \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx; \end{cases} \quad (12)$$

$$p = \int_0^l \tilde{X}^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{l}{2};$$

$$\gamma = \mu t, \quad \psi = \omega t + \theta, \quad u = a \sin \frac{\pi}{l} x \cos \psi, \quad u_t = -\omega a \sin \frac{\pi}{l} x \sin \psi, \quad u_x = \frac{\pi}{l} a \cos \frac{\pi}{l} x \cos \psi.$$

Для системи диференціальних рівнянь (12) розглянемо два випадки: *нерезонансний* $\mu \neq \omega$ і *резонансний* $\mu \approx \omega$.

Нерезонансний випадок. Як показано у [8], вплив малого періодичного збурення на амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) нелінійних систем у нерезонансному випадку незначний. Тому для аналізу руху системи використаємо так звані усереднені диференціальні рівняння, які відповідають (12), тобто рівняння

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \omega p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x \sin \psi dx d\psi d\gamma; \\ \dot{\theta} &= \frac{\varepsilon}{4\pi^2 a \omega p} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi}{l} x \cos \psi dx d\psi d\gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

У (13) припускаємо, що амплітуда $a(t)$ і фаза $\theta(t)$ коливань за період змінюється на незначне значення. Це дозволяє під час інтегрування останніх виразів вважати a і θ сталими.

Отже, одночастотні коливання середовища у нерезонансному випадку описуються залежністю (11), в якій $a(t)$ і $\theta(t)$ визначаються з диференціальних рівнянь (13).

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\pi^2 a}{2l^2} - \frac{\xi a}{2} - \frac{3a^3\delta}{32} = A(a),$$

$$\dot{\theta} = 0.$$

Із отриманих співвідношень випливає, що у першому наближенні для амплітуди існують два стаціонарні значення, які відповідно дорівнюють: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{\frac{32}{3\delta} \left(\frac{\varepsilon\pi^2}{2l^2} - \frac{\xi}{2} \right)}$.

Перше стаціонарне значення відповідає відносному спокою середовища і вказаний стан є нестійким при $A'(0) > 0$ і стійким у протилежному випадку; друге значення відповідає усталеному динамічному процесу, який описується залежністю

$$u = a_2 \cos(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

На графіку (рис.1) зображено зміну в часі амплітуди коливань a , за різних початкових умов ($a_{02}, a_{04} < a_2$ і $a_{01}, a_{03} > a_2$). Умова стійкості розв'язку $\left. \frac{dA(a)}{da} \right|_{a=a_2} < 0$.

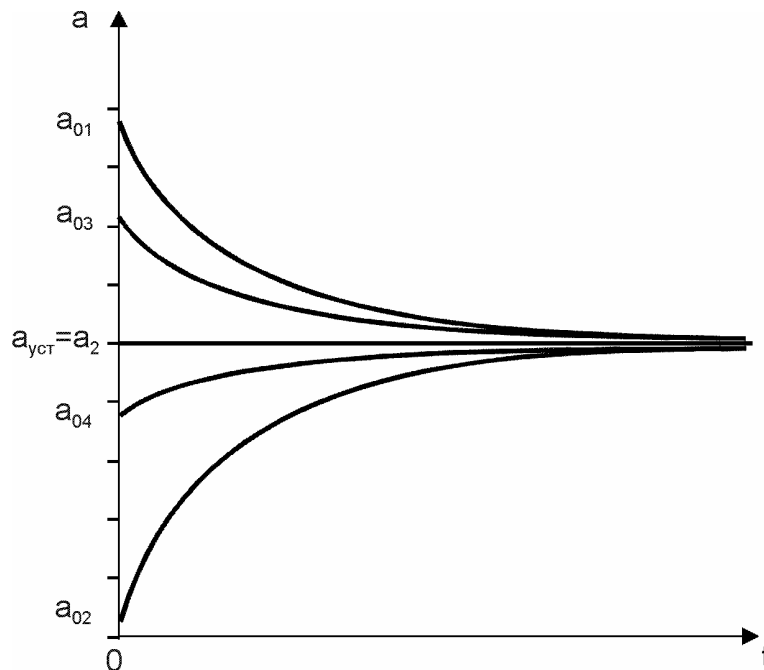


Рис. 1. Криві зміни амплітуди коливань шару середовища в нерезонансному випадку.

З проведених розрахунків випливає, що незалежно від початкових умов у нерезонансному випадку амплітуда коливань середовища контейнера вібростанини набуває свого стійкого стаціонарного значення, що відповідає усталеному динамічному процесові коливань.

Резонансний випадок. Як відомо [9], у резонансному випадку АЧХ нелінійних коливань системи суттєво залежить від фази зовнішнього збурення. Тому введемо у (12)

різницю фаз $\varphi = \psi - \gamma$, тоді для випадку головного резонансу $\omega \approx \mu$ ($m = n$) із (12) отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\omega p} \int_0^1 \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx; \\ \dot{\varphi} &= \omega - \mu + \varepsilon \frac{\cos(\varphi + \gamma)}{\omega a p} \int_0^1 \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Функція $u(x, t)$ і її похідні визначаються як і у (12), тільки для розглядуваного випадку $\psi = \gamma + \varphi$.

Усреднюючи диференціальні рівняння (14) лише за швидко змінною фазою γ , із (14) знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi\omega p} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \gamma) \cdot \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx d\gamma = \\ &= \frac{\varepsilon \pi^2 a}{2l^2} - \frac{\xi a}{2} - \frac{3a^3 \delta}{32} + \frac{2b \cos \varphi}{\pi \omega}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega - \mu + \varepsilon \frac{1}{2\pi\omega a p} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \gamma) \cdot \left((u_{xxt})^k + \frac{1}{\varepsilon} (\xi + \delta u^2) u_t + \frac{b}{\varepsilon} \sin \gamma \right) \sin \frac{\pi x}{l} dx d\gamma = \\ &= \omega - \mu - \frac{2b \sin \varphi}{\pi \omega a}. \end{aligned}$$

Перше наближення асимптотичного розв'язку рівняння у резонансному випадку описуються залежністю $u(x, t) = a(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos(\varphi + \mu t)$, в якій $a(t)$ і $\varphi(t)$ визначають з

системи нелінійних диференціальних рівнянь (15):

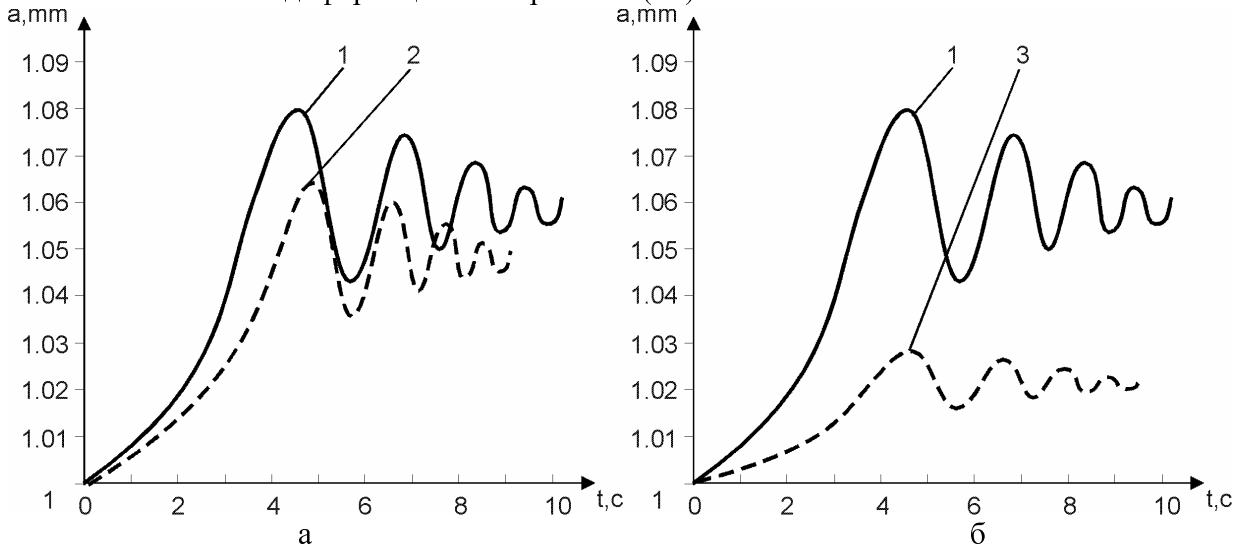


Рис.2. Резонансні криві амплітуд коливань шару середовища в перехідному режимі при $E = 1 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $k = 0.018$, $B = 400$, $B_0 = 0.01$, $F = 0.1 \text{ м}^2$, $l = 1 \text{ м}$.

Початкові умови: $a_0 = 0.001 \text{ м}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Зокрема:

а) залежності при різних видах робочого середовища контейнера вібростанини: 1 – при густині середовища 6000 кг/м^3 , значення амплітуди збурюючої сили 0.006 м , 2 – при густині середовища 7000 кг/м^3 , значення амплітуди збурюючої сили 0.006 м ;

б) залежності при різних значеннях збурюючої сили: 1 – при густині середовища 6000 кг/м^3 , значення амплітуди збурюючої сили 0.006 м , 3 – при густині середовища 6000 кг/м^3 , значення амплітуди збурюючої сили 0.002 м .

Криві побудовані за допомогою числового інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь (15). Причому прийнято закон зміни частоти збурюючої сили вигляду

$$\mu = \frac{2 \cdot \omega^* + t}{2}, \text{ де } \omega^* \Rightarrow \omega, \text{ що відповідає швидкому проходженню через головний резонанс.}$$

Як видно з графічних залежностей, значення амплітуди коливань шару середовища залежить від значення його густини, маси і амплітуди збурюючої сили (амплітуди коливань робочого контейнера вібростанини).

Аналіз залежностей показує (див. рис.2.), що головний резонанс ($\omega = \mu$), під час швидкого проходження через нього, практично не впливає на розвиток амплітуд коливань.

Отже, запропонована модель руху середовища дає змогу застосувати для опису її динаміки відносно нескладний математичний апарат як для нерезонансного, так і резонансного випадків, дослідити вплив тих чи інших параметрів на амплітуду коливань середовища, а за необхідності оптимізувати технологічний процес обробки виробів з метою отримання певних необхідних параметрів обробки.

1. Кармалюк В.И. Исследование процесса вибрационной объемной обработки и его влияние на физико-механические свойства твердых сплавов: Автореф. дис. канд. техн. наук. Львів, 1970. 22 с. 2. Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. К., 1984. 3. Слиде П.Б. Исследование послонного движения сыпучего материала при продольном вибротранспортировании // *Вопр. динамики и прочности*. 1972. Вып. 22. С.19-32. 4. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960. 5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., 1956. 6. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. К., 1976. 7. Боголюбов Н.Н. Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // *Сб. трудов и-та строительной механики АН УССР*. 1949. № 10. С.9-21. 8. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956. 9. Боголюбов Н.И., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.