

№ 1–2. 9. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М., 1955. – 556 с. 10. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. Для технических приложений. – 3-е изд. стереотипное. – М.: Наука, 1969. – 511 с.

УДК 621.372

Р. Совин

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ТЗЕ

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ СКЛАДОВИХ СІТКОВОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

© Совин Р., 2004

Пропонується метод аналізу періодичних процесів у лінійних електричних колах алгоритмічно аналогічний до аналізу кола методом накладання за гармоніками комплексним методом, але з різними числовими властивостями і можливістю використовувати для оцінки похибки розрахунку періодичного процесу похибку методу дискретизації, що лежить в основі відповідного сіткового методу.

The method of the analysis of periodic processes in linear electrical circuits algorithmically similar to the analysis electrical of a circuit by a superposition method after harmonics by a complex method is offered, but with different numerical properties and possibility to use for an error estimation of calculation of a periodic process an error of a method of digitization basing relevant grid method.

Аналіз останніх досліджень і постановка проблеми. При аналізі періодичних процесів (ПП) у лінійних електричних та електронних колах (ЕЕК) використовується метод гармонічного балансу, коли розв'язок подається деяким відрізком ряду Фур'є і розрахунок здійснюється для кожної гармонічної складової окремо, а для знаходження розв'язку використовується метод накладання. Додатною рисою цього методу є добре розроблений апарат формування і розв'язування рівнянь, що описують гармонічні складові, і це дозволяє легко алгоритмізувати процес аналізу ПП у ЕЕК. До недоліку цього методу аналізу ПП в ЕЕК можна віднести складність оцінки похибки розрахунку, а також наявність явища Гібса при аналізі ПП, що мають розриви першого роду.

Закладені в роботах [1, 2] основи сіткових методів розрахунку періодичних процесів (ПП) в електричних та електронних колах (ЕЕК), які дістали назву точкових методів (ТМ), надалі набули значного розвитку в роботах [3–5]. У результаті був створений завершений і в значній мірі формалізований апарат точкових перетворень (ТП), що дає змогу формувати точкові рівняння (ТР) без складання інтегро-диференціальних рівнянь ЕЕК. При застосуванні ТМ для аналізу ПП у лінійних електричних колах виникає потреба розв'язування системи рівнянь високого порядку, що обмежує сферу застосування цих методів порівняно нескладними ЕЕК.

Формулювання цілі статті. У роботі пропонується алгоритм розрахунку ПП у лінійних ЕЕК, що нагадує процес розрахунку гармонічних складових символічним методом у колі несинусоїдного струму, числові властивості якого залежать від використаного точкового відображення на рівномірній сітці.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо на періоді коливань T рівномірну сітку $\eta = \{t_i = i \cdot h, i = \overline{0, m}, m \cdot h = T\}$ з кроком h , де m – кількість часових точок періоду. У ТМ замість функції $x(t)$ незалежного аргументу t розглядається функція $x_i = x(t_i)$ дискретного аргументу $t_i \in \eta$, що називається точковим відображенням (ТВ) на η . Точкове відображення функції $x(t)$ із врахуванням умови періодичності $x_i = x_{i+k \cdot m}, k = \overline{0, \infty}$ можна подати як вектор ТВ $\tilde{x} = \text{colon}[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}]$. Похідні та інтеграли в рівняннях ЕЕК замінюються своїми дискретними аналогами, визначеними на сітці η , внаслідок чого система інтегро-диференціальних рівнянь замінюється системою алгебраїчних точкових рівнянь (ТР) ЕЕК.

Нехай вектор-стовпець деяких функцій $\tilde{X} = \text{colon}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ має на рівномірній сітці точкове відображення $\tilde{\tilde{X}} = \text{colon}[\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \dots, \tilde{\tilde{x}}_n]$, де $\tilde{\tilde{x}}_i, i = \overline{1, n}$ – точкове відображення i -ї змінної $x_i(t)$ дорівнює $\tilde{\tilde{x}}_i = \text{colon}[x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{im}]$, а $x_{ij} = x_i(t_j), j = \overline{0, m}$.

В основі запропонованого алгоритму лежить дискретне перетворення Фур'є

$$\dot{\tilde{X}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot (E_n \otimes F) \cdot \tilde{\tilde{X}}, \quad (1)$$

$$\tilde{\tilde{X}} = \sqrt{m} \cdot (E_n \otimes F^*) \cdot \dot{\tilde{X}}, \quad (2)$$

де E_n – одинична матриця порядку n , а $F = (F^*)^{-1}$ – унітарна квадратна матриця, що одержується шляхом транспонування матриці Фур'є F^* , елементи якої комплексно спряжені з елементами матриці F^* . Вектор-стовпець $\dot{\tilde{X}} = \text{colon}[\dot{\tilde{x}}_1, \dot{\tilde{x}}_2, \dots, \dot{\tilde{x}}_n]$ будемо називати спектральною характеристикою точкового відображення, а елементи цього вектора $\dot{\tilde{x}}_i = \text{colon}[\dot{x}_i(1), \dot{x}_i(2), \dots, \dot{x}_i(m)]$, $i = \overline{1, n}$ – спектральною характеристикою змінної $x_i(t)$. У свою чергу k -й елемент $\dot{x}_i(k), k = \overline{1, m}$ вектора $\dot{\tilde{x}}_i$ будемо називати k -ю спектральною складовою точкового відображення змінної $x_i(t)$.

Використовуючи формули (1) і (2), одержуємо

$$\dot{x}_i(k) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m r_k^{l-1} \cdot x_i(t_{l-1}); \quad k = \overline{1, m}; \quad (3)$$

і

$$x_i(t_{l-1}) = \sum_{k=1}^m r_k^{l-1} \cdot \dot{x}_i(k); \quad l = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де $r_k = \exp(\sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi(k-1)}{m})$ – k -й корінь рівняння

$$r^m - 1 = 0. \quad (5)$$

Нарешті позначимо $\dot{\tilde{X}}(k) = \text{colon}[\dot{x}_1(k), \dot{x}_2(k), \dots, \dot{x}_n(k)], k = \overline{1, m}$ – k -ту спектральну складову вектора змінних \tilde{X} , а через $\dot{\tilde{X}}_C = \text{colon}[\dot{\tilde{X}}(1), \dot{\tilde{X}}(2), \dots, \dot{\tilde{X}}(m)]$. Очевидно, що

$$\dot{\tilde{X}}_C = P_{mn} \cdot \dot{\tilde{X}} \quad (6)$$

і

$$\dot{\tilde{X}} = P_{mn}^t \cdot \dot{\tilde{X}}_C, \quad (7)$$

де P_{mn} – унітарна матриця перестановок порядку $m \cdot n$, що здійснює перестановку вигляду

$$\sigma(i) = \text{fl}\left[\frac{(i-1) \cdot m + 1}{m \cdot n}\right] + (i \cdot m - m + 1) \bmod(m \cdot n),$$

а $\text{fl}[k]$ означає найбільше ціле число, менше або дорівнює k .

Ідею алгоритму розглянемо на прикладі лінійного стаціонарного ЕЕК, описаного повною системою рівнянь

$$\Pi \cdot \vec{I} = 0; \quad (8)$$

$$\Gamma \cdot \vec{U} = 0; \quad (9)$$

$$Q_1(p) \cdot \vec{U} + Q_2(p) \cdot \vec{I} = \vec{B}, \quad (10)$$

де \vec{U} і \vec{I} – вектори-стовпці миттєвих значень напруг і струмів віток кола; Π і Γ – матриці незалежних вузлів і контурів; $Q_1(p) = [q_{1ij}(p)]$, $Q_2(p) = [q_{2ij}(p)]$ – матриці неавтономних параметрів віток кола; \vec{B} – вектор-стовпець автономних параметрів віток кола; $p = \frac{d}{dt}$ – оператор диференціювання.

Незалежно від особливостей конкретного застосованого ТП на сітці η , запишемо систему ТР ЕЕК

$$\tilde{\Pi} \cdot \tilde{I} = 0; \quad (11)$$

$$\tilde{\Gamma} \cdot \tilde{U} = 0; \quad (12)$$

$$\tilde{Q}_1 \cdot \tilde{U} + \tilde{Q}_2 \cdot \tilde{I} = \tilde{B}, \quad (13)$$

де матриці коефіцієнтів є блоковими матрицями з блоками циркулянтами [6].

Використовуючи перетворення, виражені формулами (1), (2), (6) і (7), повну систему ТР ЕЕК можна звести до вигляду

$$P_{mq} \cdot (\Pi \otimes E_m) \cdot P_{mn}^t \cdot \dot{I}_C = 0; \quad (14)$$

$$P_{ml} \cdot (\Gamma \otimes E_m) \cdot P_{mn}^t \cdot \dot{U}_C = 0; \quad (15)$$

$$Q_{C1} \cdot \dot{U}_C + Q_{C2} \cdot \dot{I}_C = \tilde{B}_C, \quad (16)$$

де

$$Q_{C1} = P_{mn} \cdot (E_n \otimes F) \cdot \tilde{Q}_1 \cdot (E_n \otimes F^*) \cdot P_{mn}^t; \quad (17)$$

$$Q_{C2} = P_{mn} \cdot (E_n \otimes F) \cdot \tilde{Q}_2 \cdot (E_n \otimes F^*) \cdot P_{mn}^t; \quad (18)$$

P_{mq} , P_{ml} – унітарні матриці перестановок порядку $m \cdot q$ і $m \cdot l$, аналогічні до матриці P_{mn} ; q і l – кількість незалежних вузлів та контурів ЕЕК.

Розглянемо структуру матриць Q_{C1} і Q_{C2} . Позначимо

$$\dot{Q}_1 = (E_n \otimes F) \cdot \tilde{Q}_1 \cdot (E_n \otimes F^*); \quad (19)$$

$$\dot{Q}_2 = (E_n \otimes F) \cdot \tilde{Q}_2 \cdot (E_n \otimes F^*). \quad (20)$$

Кожний циркулянт $\tilde{C}_{ij} = \text{circ}[c_{ij}(1), c_{ij}(2), \dots, c_{ij}(m)]$ можна подати у вигляді [6]

$$\tilde{C}_{ij} = F^* \cdot \tilde{R}_{ij} \cdot F, \quad (21)$$

де $\tilde{R}_{ij} = \text{diag}[R_{ij}(1), R_{ij}(2), \dots, R_{ij}(m)]$ – діагональна матриця з діагональними елементами, що дорівнюють власним числам циркулянта. Відомо [6], що власні числа циркулянта визначаються за формулою

$$R_{ij}(k) = \sum_{l=1}^m c_{ij}(l) \cdot I_k^{l-1}; \quad k = \overline{1, m}; \quad (22)$$

З формул (19)–(21) витікає, що матриці \dot{Q}_1 і \dot{Q}_2 одержуються заміною кожного блока циркулянта блокових матриць \tilde{Q}_1 і \tilde{Q}_2 діагональною матрицею з діагональними елементами, що дорівнюють його власним числам.

Тоді

$$Q_{C1} = P_{mn} \cdot \dot{Q}_1 \cdot P_{mn}^t; \quad (23)$$

$$Q_{C2} = P_{mn} \cdot \dot{Q}_2 \cdot P_{mn}^t. \quad (24)$$

Останні вирази показують, що матриці Q_{C1} і Q_{C2} одержуються з матриць \dot{Q}_1 і \dot{Q}_2 шляхом елементарних перестановок рядків і стовпців за допомогою матриці перестановок P_{mn} . У результаті матриця Q_{C1} є квазідіагональною блоковою матрицею вигляду $Q_{C1} = \text{diag}[Q_{C1}(1), Q_{C1}(2), \dots, Q_{C1}(m)]$; де $Q_{C1}(k)$; $k = \overline{1, m}$ одержується з матриці $Q_1(p)$ заміною кожного елемента цієї матриці k -им власним числом циркулянта \tilde{Q}_{1ij} матриці \tilde{Q}_1 . Матриця Q_{C2} має аналогічну структуру.

Не важко переконатися, що

$$P_{mq} \cdot (\Pi \otimes E_m) \cdot P_{mn}^t = E_m \otimes \Pi; \quad (25)$$

$$P_{ml} \cdot (\Gamma \otimes E_m) \cdot P_{mn}^t = E_m \otimes \Gamma. \quad (26)$$

Внаслідок такої структури матриць коефіцієнтів у рівняннях (14)–(16) ці рівняння розпадаються на m незалежних підсистем

$$\Pi \cdot \dot{I}(k) = 0; \quad (27)$$

$$\Gamma \cdot \dot{U}(k) = 0; \quad (28)$$

$$Q_{C1}(k) \cdot \dot{U}(k) + Q_{C2}(k) \cdot \dot{I}(k) = \dot{B}(k) \quad (29)$$

для кожної k -ї ($k = \overline{1, m}$) спектральної складової точкового відображення. Одержані рівняння мають розмірність вихідної системи рівнянь ЕЕК (8)–(10).

Отже, ПП у лінійному ЕЕК можна розраховувати для кожної спектральної складової точкового відображення окремо, аналогічно до того, як розраховуються гармонічні складові комплексним методом, а для визначення ТВ шуканих величин використовувати формулу (4). Це дозволяє одержати множину методів аналізу ПП алгоритмічно еквівалентних комплексному методу розрахунку гармонічних складових, але з різними числовими властивостями залежно від використаного точкового відображення.

Для прикладу розглянемо лінійний стаціонарний пасивний двополюсник, що описується рівнянням

$$a(p)u = b(p)i, \quad (30)$$

де $a(p)$ і $b(p)$ – поліноми оператора диференціювання p .

Використовуючи одно з точкових перетворень, одержуємо ТР двополюсника

$$\tilde{A} \cdot \tilde{U} = \tilde{B} \cdot \tilde{I} \quad (31)$$

Рівняння двополюсника для k -ї спектральної складової ТВ має вигляд

$$A(k) \cdot \dot{U}(k) = B(k) \cdot \dot{I}(k), \quad (32)$$

де $A(k)$ і $B(k)$ – k -ті власні числа матриць \tilde{A} і \tilde{B} .

Введемо поняття опору $Z(k)$ і провідності $Y(k)$ для k -ї спектральної складової ТВ, які будемо визначати як

$$\underline{Z}(k) = \frac{1}{\underline{Y}(k)} = \frac{\dot{U}(k)}{\dot{I}(k)} = \frac{B(k)}{A(k)} \quad (33)$$

У випадку багатополосника аналогічно можна ввести поняття будь-якої схемної функції для k -ї спектральної складової ТВ.

Очевидно, що для опору при використанні довільного точкового перетворення $\underline{Z}(k) = R$.

Для індуктивності і ємності опір і провідність для k -ї спектральної складової ТВ залежать від використовуваного ТМ. Розглянемо практично важливий випадок, коли ТВ похідної $y = \frac{dx}{dt}$ будується на основі різницевого виразу

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^q \alpha_i x_{j+s-i} - \sum_{i=0}^q \beta_i y_{j+r-i} = 0 \quad (34)$$

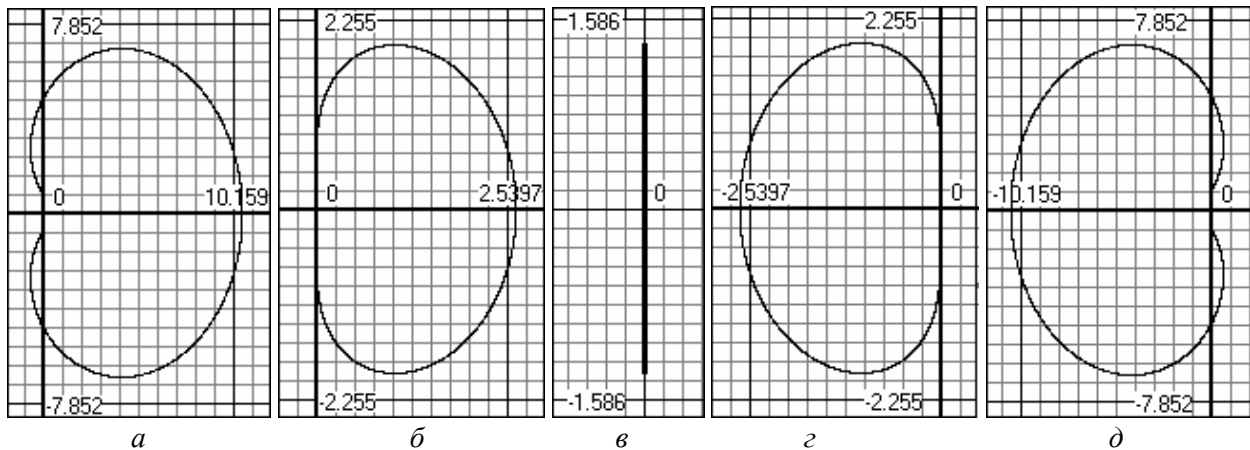
для $t = t_j$ з врахуванням умови періодичності, де q – порядок формули; h – крок сітки η ; s і r – степені забігання вперед; α_i , β_i – коефіцієнти апроксимуючого виразу. У цьому випадку для індуктивності та ємності одержуємо

$$\underline{Z}_L(k) = \frac{L}{h} \cdot d(k) \quad \text{і} \quad \underline{Z}_C(k) = \frac{h}{C \cdot d(k)}, \quad (35)$$

де

$$d(k) = \frac{A(k)}{B(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{q+1} \alpha_{q+1-i} r_k^{s-q+i-1}}{\sum_{i=1}^{q+1} \beta_{q+1-i} r_k^{r-q+i-1}}. \quad (36)$$

Інтерес становить дослідити залежність опорів індуктивності та ємності на спектрі ТВ. З цією метою відобразимо на комплексну площину змінну $d(k)$. Тоді кожному значенню $d(k)$ буде відповідати деякий вектор. На рисунку показано годографи кінців вектора $d(k)$, $k = \overline{1, m}$, при апроксимації похідної різницеvim виразом, побудованим на основі поліномів Лагранжа для $q = 4$ і різних степенях забігання вперед.



Годографи на комплексній площині змінної $d(k)$ при використанні для апроксимації похідної полінома Лагранжа четвертого порядку з різними степенями s забігання вперед:
 $a - s = 0$; $b - s = 1$; $v - s = 2$; $z - s = 3$; $d - s = 4$

Рисунок показує, що в загальному випадку СС ТВ не збігаються з гармонічними складовими ПП в ББК.

Відзначимо, що зображені на рисунку годографи кінців вектора $d(k)$ є границями областей абсолютної стійкості відповідних числових методів інтегрування диференціальних рівнянь.

Відомо, що кількість ТР, а, значить, обсяг обчислень зменшується, якщо періодичні коливання мають який-небудь вигляд симетрії. Наприклад, якщо періодичні коливання симетричні відносно осі абсцис, то достатньо розглядати ТВ лише на половині періоду коливань. У цьому випадку матриця коефіцієнтів ТР, що описують періодичний процес в ЕЕК, є блоковою матрицею з блоками косих циркулянтів. Усе вищенаведене залишається справедливим і в цьому випадку, якщо для визначення r_k замість рівняння (22) використовувати рівняння

$$r^m + 1 = 0. \quad (37)$$

Висновки. При розрахунку ПП у лінійних ЕЕК запропонованим методом для оцінки похибки можна використовувати оцінку похибки методу дискретизації, що лежить в основі даного ТМ. Це дозволяє вибрати кількість точок сітки і відповідну кількість спектральних складових ПП. Обсяг обчислень при визначенні спектральних складових ТВ менший, ніж при визначенні гармонічних складових ряду Фур'є. Тому при розрахунку періодичних режимів нелінійних електричних і електронних кіл запропонованим методом значно зменшується об'єм обчислень порівняно з методами гармонічного балансу. Відзначимо також, що запропонований метод добре стикується з алгоритмами розрахунку перехідних процесів у ЕЕК.

Використання спектральних складових ТВ для визначення ТР лінійних підсхем у періодичному режимі роботи показало ефективність запропонованого методу.

1. Ломоносов В.Ю. Периодические процессы в нелинейных цепях // *Электричество*. – 1952. – № 7. – С. 55–58. 2. Пухов Г.Е. Введение в теорию метода точек // *Тр. Таганрогского радиотехнического ин-та*. – Таганрог, 1955. – № 1. – С. 47–77. 3. Бондаренко В.М. Вопросы анализа нелинейных электрических и электронных цепей. – К.: Наукова думка, 1967. – 159 с. 4. Совпель В.Б. Расчет периодических процессов в нелинейных цепях с помощью простейших матриц интегрирования // *Теоретическая электротехника: Респ. межвед. науч.-техн. сб.* – Львов, 1970. – Вып. 10. – С. 52–56. 5. Фильц Р.В., Маляр В.С., Глухивский Л.И. Разностный метод расчета несимметричных установившихся режимов насыщенных явнополюсных синхронных машин // *Изв. вузов СССР. Электротехника*. – 1977. – № 1. – С. 40–49. 6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с. 7. Высоцкий В.М., Кирпатовский С.И., Совин Р.Я. О нахождении обратных блочных матриц, состоящих из циркулянтов. – Львов, 1974. – 8 с. – Деп. В ОВНИИЭМ 24.01.1975, № 674-д. 8. Совин Р.Я. Исследование и развитие методов двухточечной краевой задачи и точечных методов расчета периодических режимов нелинейных неавтономных электрических цепей: Автореф. дис. ...канд. техн. наук. – К., 1990. – 16 с.

УДК 621.83: 621.83.3.014

І.Д. Труфанов, І.А. Андріяс

Запорізький національний технічний університет

ОПТИМАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ В ЕЛЕКТРОМЕТАЛУРГІЇ

© Труфанов І.Д., Андріяс І.А., 2004

Основные направления развития производства всех форм собственности в условиях энергетической ситуации в начале XXI ст. во всех странах мира характеризуется широким внедрением в сферу промышленного и агропромышленного комплекса принципиально новой и модернизированной техники и прогрессивной технологии, создание и выпуск машин и энерготехнического оборудования, способных производить конкурентноспособную на внешнем рынке продукцию. Развитие металлургии в последней четверти XX ст. проходило в условиях структурно-энергетического кризиса, который к 1970 г. выявил значительные производственные