УДК 621.1

І.В. Кузьо, І.П. Смерека, Я.А. Зінько
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРОВАНИХ РУХІВ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

На основі спеціальних гіперболічних Ateb-функцій запропоновано методику розв’язання задач оптимального керування рухом матеріальних об’єктів повільнозмінної маси при дії на них суттєво нелінійного в’язкого і сухого тертя.

On the basis of the methods of hyperbolic Ateb-functions the ways of solving the problems of optimal motion directing of material object with slowly changing mass influenced by some essentially non-linear viscous and dry friction.

У задачах про рух керованих матеріальних об’єктів частину із прикладених сил, за потребою, можна змінювати. Наприклад, якщо на космічний апарат діє реактивна тяга, то можна задавати як програму орієнтацію його в просторі, так і закон зміни маси, яка визначає силу тяги; при русі в атмосфері зміною кута атаки можна міняти аеродинамічну силу, яка діє на рухомий об’єкт, тощо. Вибір програм задання вільних функцій, які називаються керуючі, можна підпорядкувати умовам оптимальності, тобто умовам, за яких характеристики руху об’єкта досягають максимальних чи мінімальних значень.

Часто в задачах оптимального керування потрібно регулювати початковим і кінцевим станом об’єкта.

На практиці зустрічаються такі задачі керуванням рухом:

1. *Задача розгону*. Потрібно розігнати або загальмувати об’єкт таким чином, щоб у момент часу *T* його швидкість набувала значення V_k.

Значення координати x_k положення об’єкта у кінці проміжку керування $[0;T]$ у цьому випадку не цікавить.

2. *Задача проведення*. Потрібно, щоб об’єкт у момент часу *T* прийшов у точку з координатою x_k, значення швидкості V_k при цьому не цікавить.

3. *Задача зближення*. Потрібно привести об’єкт у точку з координатою x_k так, щоб його швидкість у момент зближення дорівнювала V_k.

4. *Задача зближення в часі*. Потрібно привести об’єкт у задану точку в заданий момент часу, із певною швидкістю. Прикладом таких рухів є рух заготовок на прокатному стані, керовані рухи рельсового і водного транспорту, літаків, ракет тощо.

Найчастіше функцією керування виступає сила тяги $P(t)$, яка викликана двигуном обмеженої потужності, для якого $P_{\min} \le P(t) \le P_{\max}$.

Задача оптимального керування рухом об’єкта є варіаційною задачею [1, 2, 3], яка полягає у побудові оптимального закону зміни сили тяги $P(t)$, що забезпечує мінімум інтегрального функціонала для заданого динамічного маневру

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{2}\int_0^T P^2(t)dt = \min, \\ x(0) = x_0; \quad x(T) = x_k; \\ \dot{x}(0) = y(0) = y_0; \quad \dot{x}(T) = y(T) = y_k, \end{gathered} \tag{1}$$

де x_0 і y_0 – початкові, а x_k і y_k – кінцеві значення шляху *x* і швидкості *y*; *T* – час руху.

Детально питання руху і управління об'єктів з лінійними і квазілінійними характеристиками силових факторів розглянуто в роботах А.П. Батенко, Р. Беллмана, Г.Е. Кумзак, В.Ф. Кротова, В.Н. Лебедєва, Ю.Г. Сухарулидзе, Ю.А. Цандера і інших авторів.

Тут розглядається задача оптимального керування рухом літального апарата на прямолінійній ділянці траєкторії при дії суттєво нелінійного лобового опору з врахуванням сухого тертя і повільної зміни маси рухомого об'єкта.

Оптимізація руху матеріального об'єкта сталої маси під дією суттєво нелінійного лобового опору. Рух центра мас такого об'єкта під дією сили тяги і лобового опору може бути записано диференціальними рівняннями

$$\begin{gathered} \dot{x} = y; \\ M\dot{y} = P(t) - \beta_1 y^{\mu}, \end{gathered} \tag{2}$$

де M – маса об'єкта; $x(t)$, $y(t)$ – переміщення і швидкість об'єкта; $\beta_1 y^{\mu}$ – лобовий опір середовища; β_1 – коефіцієнт лобового опору; $\mu = \dfrac{\nu_1 + \nu_2 + 1}{2\nu_1 + 1}$ $(\nu_1, \nu_2 = 0,1,2,\ldots)$.

Знайшовши із формули (2) $P(t)$ і підставивши його у функціонал (1), задача оптимального керування рухом об'єкта набере вигляд

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{2}\int_0^T \left[M\dot{y} + \beta_1 y^{\mu}\right]^2 dt = \min, \\ x(0) = x_0; \quad x(T) = x_k; \\ y(0) = y_0; \quad y(T) = y_k. \end{gathered} \tag{3}$$

Отже, динамічна (траєкторна) частина задачі зводиться до мінімізації інтегрального функціонала (3), внаслідок реалізації якої отримаємо екстремальні криві $x(t)$ і $y(t)$, які задовольняють початкові і граничні умови. За знайденими екстремальними кривими $x(t)$ і $y(t)$ знаходимо оптимальне значення керуючої сили тяги $P(t)$, яка переводить об'єкт за час T із початкового положення в кінцеве.

Підінтегральна функція функціонала (3) задовольняє умови теореми Ейлера і диференціальне рівняння екстремальних розв'язків має вигляд

$$\ddot{y} - k^2 \mu y^{2\mu - 1} = 0, \tag{4}$$

де $k = \dfrac{\beta_1}{M}$.

Розв'язок суттєво нелінійного диференціального рівняння (4) зображується через гіперболічні (аперіодичні) Ateb-функцій [4]

$$\begin{gathered} y(t) = a \cdot cha(2\mu - 1, 1, \psi); \\ \dot{y}(t) = a^{\mu} k \cdot sha(1, 2\mu - 1, \psi). \end{gathered} \tag{5}$$

Тут $\psi = \mu k a^{\mu - 1} t + \psi_0$; a і ψ_0 – сталі величини; $cha(2\mu - 1, 1, \psi)$ і $sha(1, 2\mu - 1, \psi)$ – гіперболічні Ateb-функції, що задовольняють умови

$$\begin{gathered} \frac{d\text{cha}(2\mu - 1, 1, \psi)}{d\psi} = \frac{1}{\mu}\text{sha}(1, 2\mu - 1, \psi); \\ \frac{d\text{sha}(1, 2\mu - 1, \psi)}{d\psi} = \left[\text{cha}(2\mu - 1, 1, \psi)\right]^{2\mu - 1}; \\ \left[\text{cha}(2\mu - 1, 1, \psi)\right]^{2\mu} - \left[\text{sha}(1, 2\mu - 1, \psi)\right]^2 = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Підставляючи вирази (5) у рівняння (2), визначаємо оптимальне значення функції тяги

$$P(t) = \beta_1 a^{\mu}\left[sha(1, 2\mu - 1, \psi) + (cha(2\mu - 1, 1, \psi))^{\mu}\right]. \tag{7}$$

Враховуючи, що $\dot{x} = y$, після інтегрування знаходимо закон оптимального руху

$$x(t) = a\int_0^t cha(2\mu - 1, 1, \psi)dt + C_1. \tag{8}$$

Сталі інтегрування C_1, a і ψ_0 знаходимо із початкових

$$\begin{aligned} &x(0) = C_1; \\ &y(0) = a \cdot cha(2\mu - 1, 1, \psi_0) \end{aligned} \tag{9}$$

і граничних умов

$$y_k = y(T) = a \cdot cha(2\mu - 1, 1, \psi(T));$$

або

$$x_k = x(T) = a \cdot \int_0^T cha(2\mu - 1, 1, \psi)dt + C_1 , \tag{10}$$

де $\psi(T) = \mu k a^{\mu - 1} T + \psi_0$.

Отримані результати дають можливість однозначно розв’язати задачі розгону і проведення.

Розв’язок цих задач і аналіз отриманих результатів для конкретних числових значень параметрів рухомого об’єкта наведені в роботі [5].

Оптимізація руху матеріального об’єкта сталої маси під дією суттєво нелінійного опору і сили сухого тертя. Рух центра мас такого об’єкта описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y; \\ &M\dot{y} = P(t) - \beta_1 y^{\mu} - \beta_2, \end{aligned} \tag{11}$$

а задача оптимального керування (1) набирає вигляду

$$\begin{aligned} &I = \frac{1}{2}\int_0^T \left[M\dot{y} + \beta_1 y^{\mu} + \beta_2\right]^2 dt = \min, \\ &x(0) = x_0; \quad x(T) = x_k; \\ &y(0) = y_0; \quad y(T) = y_k. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут β_2 – стала сила гальмування.

Диференціальне рівняння Ейлера екстремальних розв’язків задачі (12) запишеться так

$$\ddot{y} - k^2 \mu y^{2\mu - 1} = \varepsilon \mu y^{\mu - 1}, \tag{13}$$

де $\varepsilon = \dfrac{\beta_1 \beta_2}{M^2} << 1$ – малий параметр.

Розв’язок рівняння (13) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} &y = a \cdot U(\psi) + w_1(t); \\ &\dot{y} = a^{\mu} \cdot k \cdot V(\psi) + w_2(t), \end{aligned} \tag{14}$$

де $U(\psi) = cha(2\mu - 1, 1, \psi)$; $V(\psi) = sha(1, 2\mu - 1, \psi)$; $w_1(t)$ і $w_2(t)$ – невідомі функції часу.

Після підстановки (14) у рівняння (13) і розкладу функцій $\left[aU + w_1(t)\right]^{2\mu - 1}$ і $\left[aU + w_1(t)\right]^{\mu - 1}$ в ряди Тейлора в околі незбуреного розв’язку $y = aU$, отримаємо

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = w_2(t);$$

$$\frac{dw_2(t)}{dt} = k^2\mu\left[\frac{(2\mu-1)}{1!}(aU)^{2\mu-2}w_1 + \frac{(2\mu-1)(2\mu-2)}{2!}(aU)^{2\mu-3}w_1^2 + \ldots\right] + \tag{15}$$
$$+\varepsilon\mu\left[(aU)^{\mu-1} + \frac{\mu-1}{1!}(aU)^{\mu-2}w_1 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2!}(aU)^{\mu-3}w_1^2 + \ldots\right].$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (15) шукаємо у вигляді рядів за степенями малого параметра ε

$$w_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i A_i(t);\; w_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i B_i(t). \tag{16}$$

Підставляючи (16) у систему рівнянь (15) і зрівнюючи члени з однаковими степенями малого параметра ε, матимемо

$$\begin{aligned}
&\frac{dA_1(t)}{dt} = B_1(t);\\
&\frac{dB_1(t)}{dt} = k^2\mu(2\mu-1)(aU)^{2\mu-2}A_1(t) + D_1(t);\\
&D_1(t) = \mu(aU)^{\mu-1};\\
&\frac{dA_2(t)}{dt} = B_2(t);\\
&\frac{dB_2(t)}{dt} = k^2\mu(2\mu-1)(aU)^{2\mu-2}A_2(t) + D_2(t);\\
&D_2(t) = k^2\mu\frac{(2\mu-1)(2\mu-2)}{2!}(aU)^{2\mu-3}A_1^2(t) + \frac{\mu(\mu-1)}{1!}(aU)^{\mu-2}A_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dA_i(t)}{dt} = B_i(t);\\
&\frac{dB_i(t)}{dt} = k^2\mu(2\mu-1)(aU)^{2\mu-2}A_i(t) + D_i(A_1,\ldots A_{i-1},t).\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язок отриманої системи лінійних диференціальних рівнянь (17) має вигляд

$$\begin{aligned}
&A_i(t) = V(\psi)\int_0^t D_i(\bar{t})V(\bar{\psi})\left[\int\frac{dt}{V^2(\psi)} - \int\frac{d\bar{t}}{V^2(\bar{\psi})}\right]d\bar{t};\\
&B_i(t) = \mu k a^{\mu-1}U^{2\mu-1}\int_0^t D_i(\bar{t})V(\bar{\psi})\left[\int\frac{dt}{V^2(\psi)} - \int\frac{d\bar{t}}{V^2(\bar{\psi})}\right]d\bar{t} + \frac{1}{V(\psi)}\int_0^t D_i(\bar{t})V(\bar{\psi})d\bar{t}.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{18}$$

Тут $\bar{\psi} = k\mu a^{\mu-1}\bar{t} + \psi_0$.

Оптимальні значення функції тяги $P(t)$ і закону руху $x(t)$ дорівнюють

$$P(t) = M\dot{y} + \beta_1 y^{\mu} + \beta_2 = M\left[a^{\mu}ksha(1, 2\mu-1, \psi) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i B_i(t)\right] +$$
$$+\beta_1\left[acha(2\mu-1, 1, \psi) + \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i A_i(t)\right]^{\mu} + \beta_2; \tag{19}$$

$$x(t)=\int_0^t\left[acha(2\mu-1,1,\psi)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i A_i(t)\right]dt+C_1\,. \qquad (20)$$

Оптимізація руху матеріального об'єкта повільнозмінної маси під дією суттєво нелінійного лобового опору і сили сухого тертя. При русі матеріального об'єкта із змінною масою $M(t)$, коли приєднання чи відокремлення частинок масою dM відбувається з абсолютною швидкістю $\vec{u}(t)$, яка паралельна прямолінійній траєкторії руху центра мас об'єкта, то його рух описується диференціальним рівнянням

$$M(t)\ddot{x}=P(t)-\beta_1\dot{x}^{\mu}-\beta_2+\frac{dM(t)}{dt}(u(t)-\dot{x}). \qquad (21)$$

Маса рухомого об'єкта, як правило, є повільнозмінною функцією часу, тобто її можна подати так:

$$M(t)=m_0+m_1(\tau)=M(\tau);\quad \tau=\varepsilon\, t\,, \qquad (22)$$

де m_0 – корисна маса; $m_1(\tau)$ – змінна маса, наприклад, маса палива ракети; ε – малий параметр.

Після введення заміни $\dot{x}=y$ рівняння (21) подамо у вигляді системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y;\\&M(\tau)\dot{y}=P(t)-\beta_1 y^{\mu}-\beta_2+\varepsilon\frac{dM(\tau)}{d\tau}(u(t)-y).\end{aligned} \qquad (23)$$

Тоді задача оптимального керування (1) набере вигляд

$$\begin{gathered}I=\frac{1}{2}\int_0^T\left[M(\tau)\dot{y}+\beta_1 y^{\mu}+\beta_2-\varepsilon\frac{dM(\tau)}{d\tau}(u(t)-y)\right]^2 dt=\min,\\ x(0)=x_0;\quad x(T)=x_k;\\ y(0)=y_0;\quad y(T)=y_k,\end{gathered} \qquad (24)$$

для якої диференціальне рівняння Ейлера екстремальних розв'язків запишеться так

$$\ddot{y}-k^2(\tau)\mu y^{2\mu-1}=\varepsilon\, f(y,\dot{y},t)+\varepsilon^2\frac{1}{M(\tau)}\frac{d^2M}{d\tau^2}(u(t)-y). \qquad (25)$$

Тут $k(\tau)=\dfrac{\beta_1}{M(\tau)}$; $f(y,\dot{y},t)=\dfrac{1}{M(\tau)}\dfrac{dM}{d\tau}\left[\dot{u}(t)-2\dot{y}-k(\tau)\mu(u(t)-y)y^{\,\mu-1}\right]+\mu y^{\,\mu-1}$.

Розв'язок рівняння (25) шукаємо, як і раніше, у вигляді (14)

$$\begin{aligned}&y=a\cdot U(\psi^*)+w_1(t);\\&\dot{y}(t)=a^{\mu}\cdot k(\tau)\cdot V(\psi^*)+w_2(t),\end{aligned} \qquad (26)$$

де $\psi^*=\int k(\tau)\,\mu a^{\mu-1}dt+\psi_0$.

Підставивши (26) у рівняння (25), отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{d(aU)}{dt}+\frac{dw_1}{dt}=a^{\,\mu}k(\tau)V+w_2;\\&\varepsilon a^{\,\mu}\frac{dk(\tau)}{d\tau}V+k^2(\tau)\mu a^{\,2\mu-1}U^{2\mu-1}+\frac{dw_2}{dt}-k^2(\tau)\mu(aU+w_1)^{2\mu-1}=\\&=\varepsilon\, f\left(aU+w_1,\, a^{\,\mu}k(\tau)V+w_2,\, t\right)+\varepsilon^2\frac{1}{M(\tau)}\frac{d^2M}{d\tau^2}(u(t)-aU-w_1).\end{aligned} \qquad (27)$$

Якщо розкласти в ряди Тейлора функції $(aU+w_1)^{2\mu-1}$ і $f\left(aU+w_1,\, a^{\,\mu}k(\tau)V+w_2,\, t\right)$ в околі незбурених розв'язків $y=aU$, $\dot{y}=a^{\,\mu}k(\tau)V$, а саме:

$$\left(aU+w_1\right)^{2\mu-1}=\left(aU\right)^{2\mu-1}+\frac{2\mu-1}{1!}\left(aU\right)^{2\mu-2}w_1+\frac{(2\mu-1)(2\mu-2)}{2!}\left(aU\right)^{2\mu-3}w_1^2+\ldots;$$

$$f\left(aU+w_1,\,a^{\mu}k(\tau)V+w_2,\,t\right)=f\left(aU,\,a^{\mu}k(\tau)V,\,t\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial w_1}\right|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}w_1+\left.\frac{\partial f}{\partial w_2}\right|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}w_2+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}\right|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}w_1^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_2}\right|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}w_1w_2+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_2^2}\right|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}w_2^2\right\}+\ldots$$

і підставити ці розклади у формули (27), матимемо

$$\frac{dw_1}{dt}=w_2;$$

$$\begin{aligned}\frac{dw_2}{dt}&=k^2(\tau)\mu\left[(2\mu-1)(aU)^{2\mu-2}w_1+\frac{1}{2}(2\mu-1)(2\mu-2)(aU)^{2\mu-3}w_1^2+\ldots\right]-\\&-\varepsilon a^{\mu}\frac{dk(\tau)}{d\tau}V+\varepsilon\left[f\left(aU;\,a^{\mu}k(\tau)V,\,t\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial w_1}\right|_0 w_1+\left.\frac{\partial f}{\partial w_2}\right|_0 w_2+\ldots\right]+\\&+\varepsilon^2\frac{1}{M(\tau)}\frac{d^2M(\tau)}{d\tau^2}\left(u(t)-aU-w_1\right).\end{aligned}\tag{28}$$

Невідомі функції $w_1(t)$ і $w_2(t)$ подамо, як і раніше, у вигляді рядів за степенями малого параметра ε (формули (16)).

Якщо підставити (16) у формули (28) і зрівняти члени з однаковими степенями малого параметра ε, то отримаємо систему диференціальних рівнянь для знаходження коефіцієнтів розкладу $A_i(t)$, $B_i(t)$ $(i=1,2,\ldots)$.

$$\frac{dA_i(t)}{dt}=B_i(t);$$

$$\frac{dB_i(t)}{dt}=k^2(\tau)\mu(2\mu-1)(aU)^{2\mu-2}A_i(t)+D_i\left(A_1,\ldots A_{i-1},B_1,\ldots B_{i-1},t\right)\tag{29}$$

$$(i=1,2,\ldots),$$

де

$$D_1=-a^{\mu}\frac{dk(\tau)}{d\tau}V+f\left(aU,\,a^{\mu}k(\tau)V\right);$$

$$D_2=\frac{1}{2}k^2(\tau)\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(aU)^{2\mu-3}A_1^2+\left.\frac{\partial f}{\partial w_1}\right|_0 A_1+\left.\frac{\partial f}{\partial w_2}\right|_0 B_1+\frac{1}{M(\tau)}\frac{d^2M(\tau)}{d\tau^2}\left(u(t)-aU\right);$$

$$D_3=k^2(\tau)\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(aU)^{2\mu-3}A_1A_2+\frac{1}{6}k^2(\tau)\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)(aU)^{2\mu-4}A_1^3+$$

$$+\left.\frac{\partial f}{\partial w_1}\right|_0 A_2+\left.\frac{\partial f}{\partial w_2}\right|_0 B_2+\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}\right|_0 A_1^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_1\partial w_2}\right|_0 A_1B_1+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial w_2^2}\right|_0 B_1^2\right]-\frac{1}{M(\tau)}\frac{d^2M(\tau)}{d\tau^2}A_1;$$

………………………………………………………………………………………………

Розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (29) з точністю до малого параметра ε має вигляд (18), тобто

$$A_i(t)=V(\psi^*)\int_0^t D_i(\bar t)V(\bar\psi^*)\left[\int\frac{dt}{V^2(\psi^*)}-\int\frac{d\bar t}{V^2(\bar\psi^*)}\right]d\bar t;$$

$$B_i(t) = k(\tau)\mu a^{\mu-1} U^{2\mu-1}(\psi^*) \int_0^t D_i(\bar{t}) V(\bar{\psi}^*) \left[\int \frac{dt}{V^2(\psi^*)} - \int \frac{d\bar{t}}{V^2(\bar{\psi}^*)} \right] d\bar{t} + \tag{30}$$

$$+ \frac{1}{V(\psi^*)} \int_0^t D_i(\bar{t}) V(\bar{\psi}^*) d\bar{t} \; ;$$

$$(i = 1, 2, \ldots),$$

де $\bar{\psi}^* = \int k(\bar{\tau}) \mu a^{\mu-1} d\bar{t} + \psi_0; \; \bar{\tau} = \varepsilon \bar{t}$.

Оптимальні значення функції тяги $P(t)$ і закону руху $x(t)$ дорівнюють

$$P(t) = M(\tau)\dot{y} + \beta_1 y^{\mu} + \beta_2 - \varepsilon \frac{dM(\tau)}{d\tau}(u(t) - y) =$$

$$= M(\tau) \left[a^{\mu} k(\tau) \mathrm{sha}(1, 2\mu - 1, \psi^*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i B_i(t) \right] +$$

$$+ \beta_1 \left[a \mathrm{cha}(2\mu - 1, 1, \psi^*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i A_i(t) \right]^{\mu} + \beta_2 - \tag{31}$$

$$- \varepsilon \frac{dM(\tau)}{d\tau} \left[u(t) - a \mathrm{cha}(2\mu - 1, 1, \psi^*) - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i A_i(t) \right];$$

$$x(t) = \int_0^t \left[a \mathrm{cha}(2\mu - 1, 1, \psi^*) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i A_i(t) \right] dt + C_1 . \tag{32}$$

Сталі інтегрування a, ψ_0 і C_1 в отриманих законах руху (20) і (32) знаходяться з початкових і граничних умов. Розв’язки для сили тяги (формули (19), (31)) і закону руху (формули (20), (32)) збігаються рівномірно на інтервалі $[0, T]$, який хоча і скінчений, але має довжину близько $T = \frac{1}{\varepsilon}$ і може бути як завгодно великим при $\varepsilon \to 0$.

1. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. – М: Сов. радио, 1977. – 254 с. 2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – М.: Наука, 1964. – 359 с. 3. Кумзак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. – М: Наука, 1976. – 744 с. 4. Сеник П.М. Про Ateb-функції. – Доп. АН УРСР/ – Сер. А – 1968. – № 1. – С. 23–27. 5. Кузьо І.В., Смерека І.П., Зінько Я.А. Спеціальні Ateb-функції в задачах оптимізації керованих рухів // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2003 – № 483. – С. 68–71.