УДК 621.3.019:51.001.57.

О.Ю. Лозинський, С.В. Щербовських
Національний університет “Львівська політехніка”
кафедра ЕАП

ФОРМУВАННЯ РІВНЯНЬ ПРОСТОРУ СТАНІВ ДЛЯ ДОВІЛЬНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВІДМОВ ТА ВІДНОВЛЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ПЕРЕХОДІВ

Розглянуто проблеми, пов’язані із коректністю застосування неоднорідних марківських математичних моделей надійності щодо опису електротехнічних об’єктів. Проаналізовані постулати Пуассона та виведено рівняння простору станів, враховуючи допущення про те, що характеристики випадкових процеси відмов та відновлень підпорядковуються довільним законам розподілу.

The paper deals with problems of correctness non-homogeneous Markov mathematic reliability models creating. On the assumption of arbitrary failure and renewal random process distributions Poisson postulates analysis and state space equations creating were made.

Постановка проблеми. В основі розрахунку деяких показників надійності досліджуваного електротехнічного об’єкта методом простору станів [1] покладено аналіз відповідної цьому об’єкту однорідної марківської математичної моделі надійності. Такій підхід виступає досить ефективним, а часто єдиним раціональним інструментом для розрахунку, наприклад, коефіцієнта готовності такого об’єкта. Цей метод ґрунтується на допущенні, про те, що характеристики усіх випадкових процесів відмов і відновлень, що відбуваються в об’єкті, підпорядковуються тільки експоненціальному закону розподілу. У випадку, коли характеристики випадкових процесів суттєво відрізняються від характеристик експоненціального закону розподілу, рівень адекватності відповідної однорідної марківської математичної моделі надійності такого об’єкта буде суттєво знижуватися. Проблема низької адекватності моделей такого роду особливо гостро постає при дослідженні деяких електротехнічних об’єкпв, для яких лямбда-характеристика не містить постійної ділянки [2, 3]. Також на зниження рівня адекватності впливає те, що характеристики процесів відновлення, так само, суттєво відрізняються від характеристик експоненціального закону розподілу [2, 4]. З метою підвищення рівня адекватності математичних моделей надійності, враховуючи характер випадкових процесів, який відмінний від експоненціального, постає проблема застосування неоднорідних марківських математичних моделей надійності щодо електротехнічних об’єктів.

Вирішення проблеми дозволить обґрунтованіше виконувати проектування надлишкових елементів в електротехнічних виробах [5] та точніше оцінювати вплив характеристик процесів відновлення на результуючий коефіцієнт готовності досліджуваного об’єкта.

Аналіз останніх досліджень. Під електротехнічним об’єктом тут розуміємо такий об’єкт, який можливо умовно розбити на сукупність логічних елементів, що сполучені між собою у заданий спосіб. Приймаємо, що на характеристики надійності певного елемента інші елементи не впливають. Для сукупності об’єктів такого роду прийнятним є трактування у вигляді часових епюр процесів напрацювання та відновлення [6].

У роботах [7, 8, 9] пропонується для розрахунку коефіцієнта готовності застосовувати неоднорідні марківські математичні моделі вигляду

$$\frac{d}{dt}\Pr_i(t) = -\lambda_i(t)\Pr_i(t) + \sum\nolimits_{k\neq i}\lambda_{ki}(t)\Pr_k(t),$$

де $\Pr_i(t)$ – імовірність перебування об’єкта в i-му стані, $\lambda_i(t)$ – певний змінний коефіцієнт, У математичній літературі [10, 11] такі диференціальні рівняння є також відомими і набули значного застосування. Проте, власне, тут виникають невирішені проблеми. Однією із найважливіших проблем є питання правомірності побудови відповідних неоднорідних марківських математичних моделей надійності для досліджуваного класу об'єктів. У [7] цьому аспектові не приділено жодної уваги, а в [8, 9, 10, 11] викладення стосуються таких випадкових процесів, для яких трактування, наведене в [6], є не прийнятним внаслідок відмінної природи випадкових процесів.

Задачі досліджень. Метою статті є виведення та перевірковий аналіз узагальнених неоднорідних диференціальних рівнянь, що визначають імовірності окремих станів об'єкта, з погляду надійності (надалі, диференціальних рівнянь простору станів). Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі. По-перше, проаналізувати обмежуючу дію постулатів Пуассона, оскільки вони лежать в основі цього підходу. По-друге, враховуючи такий аналіз; відкинути ті постулати, які виконують обмеження лише показниковим законом розподілу, і вивести рівняння простору станів без них. По-третє, необхідно підтвердити коректність отриманих рівнянь шляхом переходу до однорідних рівнянь Колмогорова – Чепмена.

Виклад основного матеріапу. ***Постулати Пуассона виступають*** системою обмежуючих допущень, які вирізняють особливий вид потоків подій серед усієї множини взагалі можливих потоків. Залежно від галузі застосування, під подіями можна розуміти різні сутності. Тут, під поняттям "подія", розуміємо відмову електротехнічного об'єкта або його відновлення. У такому разі, інтервал часу між двома сусідніми подіями трактується як наробіток або тривалість ремонту. Визначимо, чи справджується кожний конкретний постулат для випадкових процесів відмов та відновлень, характеристики яких описуються довільними законами розподілу. З цією метою розглянемо наступний дослід. Нехай маємо N елементів, характеристики безвідмовності яких підпорядковуються довільним законам розподілу. У початковий момент часу t_0 навантажується одночасно M елементів із досліджуваної множини. Пропрацювавши, один із елементів виходить із ладу в момент часу t_1 причому тривалість такого інтервалу (t_0, t_1) є випадковою величиною, характеристика якої пов'язана із функцією безвідмовності цього елемента. Після відмови елемент миттєво заміняється на наступний елемент із цієї ж сукупності і т. д. Описаний вище процес відповідає системі M елементів, які з'єднані між собою логічним паралельним зв'язком і кожний із яких має багатократний активний резерв. Введемо для зручності відображення змісту постулатів, дискретну інтегральну випадкову функцію X(t), значення якої в момент часу t, визначається як кількість відмов, що сталась до цього моменту часу. Дана функція мас вигляд сходинок із стрибком на величину "+1" в момент часу, в якій сталась відмова наступного елемента.

Постулат 1 визначає початковий стан процесу $P[X(0) = 0] = 1$. Цей постулат стверджує, що в початковий момент часу усі елементи є працездатними. Цей постулат є дійсним як для показникового закону розподілу, так і для будь якого іншого закону розподілу, що може використовуватись в теорії надійності. Також однозначно можна говорити, що твердження даного постулату не залежать від того, один чи кілька елементів навантажено одночасно. Даний постулат є проявом властивості, яка полягає в тому, що площа під кривою густини розподілу дорівнює одиниці.

Постулат 2 визначає імовірність відмови чергового елемента протягом елементарного проміжку часу $P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = \lambda\Delta t$, де Δt – нескінченно малий проміжок часу. Даний постулат стверджує, що імовірність появи однієї відмови внаслідок виходу з ладу наступного елемента, із досліджуваної множини елементів, протягом нескінченно малого проміжку часу Δt, в околі довільного часу t, є величиною, яка прямо пропорційна тривалості цього проміжку. Причому, величина λ, інтенсивність відмов, виступає тут коефіцієнтом пропорційності. Цей постулат утворює жорстке обмеження. Він справджується лише в тому випадку, якщо усі елементи досліджуваної множини підпорядковуються тільки показниковому закону розподілу відмов. Властивості стаціонарності та відсутності післядії, стосовно математичних моделей надійності, є наслідками даного постулату.

Постулат 3 визначає імовірність виникнення двох і більше відмов протягом елементарного проміжку часу Δt $P[X(t + \Delta t) - X(t) \geq 2] = o_1(\Delta t)$, де $o_1(\Delta t)$ – нескінченно мала величина, що має вищий порядок малості за Δt. Цей постулат визначає властивість ординарності, яка полягає в тому, що імовірність появи двох і оільше відмов досліджуваних елементів протягом нескінченно малого проміжку часу Δt, в околі довільного часу t, є величиною вищого порядку малості за нескінченно малий проміжок часу Δt, тобто є подією неможливою. Дійсно, при послідовній відмові елементів в одному і тому ж функціональному місці, кожний наступний елемент навантажується після відмови попереднього, а тому про можливість одночасності не може йтися. Більше того, у разі послідовних відмов елементів у паралельних функціональних місцях, завжди можна вибрати настільки малий інтервал часу Δt, який буде меншим за час між відмовами цих двох елементів, що перейшли у непрацездатний стан один за одним. Враховуючи наведені вище міркування, даний постулат також не накладає жодних обмежень на закони розподілу.

Розглянемо тепер *властивість,* яка буде необхідною для формування системи рівнянь простору станів і визначає імовірність відсутності відмови протягом елементарного проміжку часу. Виведемо цю властивість, зважаючи на вже перевірені і прийняті постулати. Для елементарного проміжку часу справедлива рівність

$$P[X(t + \Delta t) - X(t) = 0] + P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] + P[X(t + \Delta t) - X(t) > 2] = 1,$$

яка визначає, що протягом елементарного проміжку часу Δt, в околі довільного моменту часу t, можна виділити таку групу подій: не з’явилось жодної відмови, з’явилась одна відмова, з’явилось більше двох відмов. Визначимо із цієї рівності імовірність події, що жодної відмови не станеться протягом часу Δt і, враховуючи постулат 3 про ординарність та нехтуючи величинами вищих порядків малості, отримаємо

$$P[X(t + \Delta t) - X(t) = 0] = 1 - P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1].$$

Якщо прийняти, що заміни елементів у даному досліді відбуваються не миттєво, а із затримками, що трактуються як тривалості відновлення, і які є випадковими величинами, характеристики яких описуються довільними законами розподілу, то неважко показати, що для такого вдосконаленого досліду постулат 1 про початковий стан та постулат 3 про ординарність справджуються так само.

Виведення диференціальних рівнянь простору станів виконаємо у проекційному зв’язку із тими постулатами Пуассона, які не виконують обмежуючої дії на закони розподілу. Нехай в просторі станів об’єкта існує стан із номером k, в який досліджуваний об’єкт може попасти із сусідніх станів k – 1, k – 2 ... та вийти із нього в сусідні стани k + 1, k + 2,... Розглянемо елементарний проміжок часу Δt, який починається в довільний момент часу t. Імовірність події полягає в тому, що система перебуває в момент часу $t + \Delta t$ в стані k визначається як $P_k(t + \Delta t) =$ $= P[A_1 \vee A_2 \vee A_3]$, де A_1 – подія, при якій об’єкт в момент часу t перебував в стані k і за час Δt залишився в даному стані k; A_2 – подія, при якій об’єкт в момент часу t перебував в одному із сусідніх, стосовно стану k, станах k – 1, k – 2... і за час Δt перейшов в досліджуваний стан k; A_3 – подія, при якій об’єкт в момент часу t перебував в одному із не сусідніх до стану k станах k – m, k – m – 1... і за час Δt перейшов через сусідні стани в досліджуваний. Згідно з постулатом 3 про ординарність подія A_3, яка визначає, що за час Δt станеться більше ніж одна відмова, є подією неможливою, тобто постулат 3 визначає, які події необхідно враховувати, а які треба відкинути. Події перебування системи в тому чи іншому стані є несумісними, і тому можемо записати, що $P_k(t + \Delta t) = P[A_1 \vee A_2] = P[A_1] + [A_2]$.

Імовірність події A_2 можна розкласти на суму імовірностей несумісних подій перебування системи в сусідніх, щодо стану k, станах. Події A_1 та A_2 – це логічний добуток залежних подій

$$P_k(t + \Delta t) = P\left[B_k B_{kk}\right] + \sum_{j=N_m}^{k-1} P\left[B_j B_{jk}\right] = P\left[B_{kk} \middle| B_k\right] + \sum_{j=0}^{k-1} P\left[B_j\right] P\left[B_{jk} \middle| B_j\right],$$

де B_{kk} – подія, яка полягає в тому, що за час Δt об’єкт залишиться в стані k; B_k – подія, яка полягає в тому, що в момент t об’єкт перебував в стані k; N_m – номер першого сусіднього стану, стосовно стану k; B_{jk} – подія, яка полягає в тому, що за час At об’єкт перейде із стану j в стан k;

B_j – подія, яка полягає в тому, що в момент часу t об'єкт перебував в сусідньому, стосовно досліджуваного стану k, стані j.

Події B_{kk} та B_k і B_{jk} та B_j є залежними. Тобто імовірність того, що система залишиться в стані k залежить від того, що система перебувала саме в стані k на початку, а імовірність переходу із стану j в стан k залежить від того, що система перебувала до переходу в стані j. Ці твердження, власне, є очевидними, проте із них випливає цікавий наслідок. Імовірність переходу із одного стану в інший стан протягом елементарного часу Δt, внаслідок відмови певного елемента, характеристика безвідмовності якого описується довільним законом розподілу відмов і при довільній структурі простору станів, залежить як від закону розподілу безвідмовності цього елемента, так і від стану, із якого цей перехід здійснюється. Це означає, що характеристики надалі уточнимо, які, що відповідають відмові одного і того ж елемента, для різних попередніх станів, в загальному випадку, різняться.

Введемо такі позначення: імовірність перебування системи в стані j в момент часу t означимо як $P[B_j] = P_j(t)$, а імовірність перебування системи в стані k в момент часу t означимо як $P[B_k] = P_k(t)$, відповідно. Позначимо умовну імовірність переходу системи із стану j в стан k протягом часу Δt, за умови, що система перебувала в стані j в момент часу t, як $P[B_{jk} \mid B_j] = P_{jk}(\Delta t, t \mid S_j)$, де S_j – означає стан j. Аналогічно позначимо умовну імовірність того, що система залишиться в стані k протягом часу Δt, за умови, що система перебувала в стані k в момент часу t, як $P[B_{kk} \mid B_k] = P_{kk}(\Delta t\ t \mid S_k)$. Даний вираз визначає відсутність відмов протягом часу Δt. Тоді, якщо скористаємось властивістю про імовірність відсутності відмов, яка була розглянута вище, отримаємо, що досліджуваний вираз умовної імовірності можна перетворити до вигляду

$$P_{kk}\left(\Delta t,t \mid S_k\right)=1-\sum_{l=k+1}^{N_n} P_{kl}\left(\Delta t,t \mid S_k\right),$$

де $P_{ki}(\Delta t, t \mid S_k)$ – імовірність переходу об'єкта із стану k в сусідній стан l протягом елементарного періоду часу Δt за умови, що система перебувала в стані k; N_n – номер останнього сусіднього, стосовно досліджуваного стану k, стану, із якого об'єкт може перейти в стан k.

Таким чином подія, що полягає у відсутності переходу системи із стану k, протягом елементарного періоду часу Δt, утворює повну групу подій із незалежними подіями, що полягають у переході об'єкта в сусідні стани k + 1, k + 2..., протягом елементарного періоду часу Δt, за умови що в момент часу t об'єкт перебував у стані k. Враховуючи подані позначення, отримаємо, що

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)\left(1-\sum_{l=k+1}^{c} P_{kl}\left(\Delta t,t \mid S_k\right)\right)+\sum_{j=N_m}^{k-1} P_j(t)P_{jk}\left(\Delta t,t \mid S_j\right).$$

Тепер у виразах умовних імовірностей переходів між станами протягом проміжку часу Δt відкинемо усі величини вищих порядків малості стосовно елементарного проміжку часу Δt.

Часову функцію, яка виявиться множником до Δt, внаслідок такого перетворення, назвемо функцією інтенсивності переходу, або просто функцією переходу

$$P_{ij}\left(\Delta t,t \mid S_j\right)=h_{ij}\left(t \mid S_j\right)\Delta t+o_3(\Delta t),$$

де $h_{jj}(t \mid S_i)$ – функція переходу із стану i в стан j, $o_3(\Delta t)$ – величина вищого порядку малості порівняно із елементарним проміжком часу Δt.

Зауважимо, що загального алгоритму формування функцій переходу не існує, однак, для окремих моделей надійності електротехнічних об'єктів, можна визначити ці функції у вигляді відношення згорток імовірнісних функцій окремих елементів. Розкриємо дужки у виразі імовірності перебування системи в стані k, в момент часу t + Δt і перенесемо $P_k(t)$ в ліву частин виразу

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=-P_k(t)\sum_{l=k+1}^{N_n} h_{kl}\left(t \mid S_k\right)\Delta t+\sum_{j=N_m}^{k-1} P_j(t)h_{jk}\left(t \mid S_j\right)\Delta t,$$

де $h_{kl}(t \mid S_k)$ – функція переходу із досліджуваного стану k в стан l; $h_{jk}(t \mid S_k)$ – функція переходу із стану j в досліджуваний стан k.

Розділимо отриманий вираз на елементарний проміжок часу Δt та перейдемо до границі. Отримане диференціальне рівняння визначає похідну імовірності перебування системи в заданому стані k. Такі диференціальні рівняння необхідно записати для усіх станів простору станів досліджуваного електротехнічного об'єкта

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -P_k(t)\sum_{l=0}^{N_s} h_{kl}\left(t\middle|\ S_k\right) + \sum_{j=0}^{N_s} P_j(t)h_{jk}\left(t\middle|\ S_j\right),$$

де N_s – кількість станів, в яких може перебувати досліджувана система, для k = 0 ... N_s. Дану систему рівнянь необхідно інтегрувати при таких початкових умовах: $P_0(0) = 1$, $P_1(0) =...= P_k(0) = 0$.

Рівняння записані так, що перебір функцій переходу відбувається за всіма станами. Там, де переходу між станами не має, приймаємо функцію переходу нульовою. Розглянемо тепер формування початкових умов. Математична модель надійності довільного електротехнічного об'єкта характеризується тим, що завжди наявний особливий стан, в якому об'єкт перебуває на початку функціонування. Імовірність перебування об'єкта в такому стані, згідно з постулатом 1 про початковий стан, є одиничною $P_0(0) = 1$. Тут приймаємо індекс такого стану "0". Відповідно, імовірність перебування об'єкта в інших станах, в початковий момент часу дорівнює нулю $P_k(0) = 0$.

Зведення рівнянь простору станів до однорідних диференціальних рівнянь. Колмогорова – Чепмена можна виконати у випадку, коли постулат 2 про імовірність появи однієї відмови протягом елементарного моменту часу буде справджуватись, тобто приймаємо, що характеристики надійності усіх елементів системи підпорядковуються винятково показниковому закону розподілу. У такому разі, можливо показати, що функції переходів перетворюються в константи, які дорівнюють параметрам законів розподілу, тобто інтенсивностям відмов або відновлень, характеристик відповідних процесів, $h(t \mid S_j) = \lambda_{ij}$.

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -P_k(t)\sum_{l=0}^{N_s}\lambda_{kl} + \sum_{j=0}^{N_s} P_j(t)\lambda_{jk} \ ,$$

для k = 0 ... N_s, при $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = ... = P_k(0) = 0$.

Зауважимо, що під час формування систем диференціальних рівнянь як загальної, так і її лінійного випадку, властивості стаціонарності та відсутність післядії процесу відмов та відновлень не застосовувались, хоча остання система рівнянь має ці властивості.

Висновки. На основі проведених досліджень, можна зробити висновок, що побудова математичних моделей надійності електротехнічних об'єктів на основі застосування неоднорідних ланцюгів Маркова є правомірною. Функції інтенсивності переходу $\lambda_{ij}(t)$, які виступають змінними коефіцієнтами в диференціальних рівняннях Колмогорова – Феллера повністю відповідають функціям переходу $h_{ij}(t \mid S_i)$ в математичних моделях надійності на основі неоднорідних марківських ланцюгів. Функції переходу виступають характеристиками об'єкта, процеси відмов чи відновлень якого вони описують і можуть розглядатись на рівному із іншими його характеристиками як функція інтенсивності відмов λ(t), функція безвідмовності R(t), функція відновлення M(t) тощо. У статті показано, що функція переходу залежить як від часу, так і від стану із якого здійснюється перехід. Це означає, що одному і тому ж елементу складного об'єкта, в загальному випадку, можуть відповідати декілька різних функції переходу, які ідентифікуються станами, із яких здійснюється відповідний перехід. Тобто функцію переходу можна розглядати як засіб врахування передісторії процесу відмов та відновлень конкретного елемента об'єкта в неоднорідних марківських математичних моделях надійності. За умови, що усі елементи підпорядковуються експоненціальному закону розподілу, функції переходів вироджуються в константи і, внаслідок чого отримаємо класичні однорідні диференціальні рівняння Колмогорова – Чепмена.

Як виконати синтез аналітичних виразів функцій переходів є темою подальшого дослідження. На це запитання можливо відповісти лише в окремих випадках, для яких відповідну математичну модель надійності електротехнічного об'єкта можливо утворити за допомогою альтернативних підходів. Залишається також невирішеним питання ефективності математичних моделей надійності на основі неоднорідних ланцюгів Маркова.

1. Лозинський О.Ю., Марущак Я.Ю., Костровій П.П. Розрахунок надійності електроприводів: Підручник. – Львів: Вид-во Держ. ун-ту "Львівська політехніка", 1996. – 234 с. 2. MIL-HDBK-217F. Reliability Prediction of Electronic Equipment. – Superseding MIL-HDBK-217E, Mr. 2 December 1991. – US DOD, 1991. – 205 p. 3. Cao Y., Sun H., Trivedi K., James J. Han System Availability With Non-Exponentialfy Distributed Outages // IEEE Transactions on Reliability. – 2002. – Vol. 51, No. 2. – P. 193–198. 4. Райнике К., Ушаков И.А., Оценка надежности систем с использованием графов / Под ред. И.Л. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1988. — 208 с. 5. John B. Bowles, Commentary – Caution: Constant Failure-Rate Models May Be Hazardous to Your Design / IEEE Transactions on Reliability. – 2002. – Vol. 51, No. 3. – P. 375–377. 6. Теория надежности радиоэлектронных систем в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов радиотехнических специальностей вузов / Под ред. Г.В. Дружинина. – М.: Энергия, 1976. – 448 с. 7. Hassett T., Dietrich D., Szidarovszky F. Time-Varying Failure Rate in the Availability & Reliability Analysis of Repairable Systems // IEEE Transactions on Reliability. – 1995. – Vol. 44, No. 1. – P. 155–160. 8. Perman M., Senegacnik A. Semi-Markov Models with an Application to Power-Plant Reliability Analysis // IEEE Transactions on Reliability. – 1997. – Vol. 46, No. 4. – P. 526–531. 9. Platis A., Limnios N. Le Du M. Performability of Electric-Power Systems Modeled by Non-Homogeneous Markov Chains // IEEE Transactions on Reliability. – 1996. – Vol. 45, No. 4. – P. 605–610. 10. Коваленко И.Н., Сарманов О.В. Краткий курс теории случайных процессов. – К.: Вища школа, 1978. – 264 с. 11. Leemis L., Arkin B.L. Nonparametric Estimation of the Cumulative Intensity Function for a Non-homogeneous Poisson Process from Overlapping Realizations // Management Science. – 2000. – Vol. 46, No. 7. – P. 989–998.

УДК 621.001.21; 621.316.3

Л.О. Никонець, А.А. Маліновський, Ю.Л. Шелех, Т.Г. Андрієнко
Національний університет "Львівська політехніка"
кафедра електричних машин

ВОЛЬТАМПЕРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПІЛЬНОТИ ЛЮДЕЙ ПРИ ДІЇ ПОСТІЙНОЇ НАПРУГИ

На основі експериментальних досліджень обґрунтовані визначальні параметри вольтамперних характеристик спільноти людей за дії постійної напруги, як бази для розроблення рекомендацій з електробезпеки в електроустановках постійного струму.

On the basis of experimental researches the proved determining parameters volt-ampere characteristics of community of people at action of a constant voltage which base for development of recommendations on an electrosecurity in electroinstallations of a direct current.

Постановка проблеми. Для нормування допустимих для людини електричних дій слід брати до уваги найгірший стан організму, коли за рівних інших умов через тіло буде проходити найбільший струм. Це обумовлює необхідність проведення багаторазових досліджень характеристик однієї людини протягом певного часу, який можна вважати представницьким, а також визначення характеристик представницької групи людей.