

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma}^* &= -2G_1 p D^{-1}(p) \left\{ (pR_1)^{-1} [D_1(p) + nD_3(p)\omega^{-1}(p)\omega_1(p)] + \right. \\
&\quad \left. + [D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)]\omega^{-1}(p)\omega_1(p) \right\} \cos n\varphi, \\
\omega(p) &= 2(pR_1)^{-1} \left[n^2(pR_1)^{-1} J_n(pR_1)D_4(p) - 4(1-\nu_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)D_5(p) \right] \times \\
&\quad \times [D_1(p) + 0.5p^2 R_1^2 J_n(pR_1)D_4(p) + 2(1-\nu_1)pR_1 J_n^2(pR_1)D_5(p)] - n^2 J_n^2(pR_1)D_4^2(p), \\
\omega_1(p) &= -2n \left\{ (pR_1)^{-1} D_3(p) \left[n^2(pR_1)^{-1} J_n(pR_1)D_4(p) - 4(1-\nu_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)D_5(p) \right] - \right. \\
&\quad \left. - J_n(pR_1)D_4(p) [D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)] \right\}, \\
\omega_2(p) &= -2(pR_1)^{-1} \left\{ 2 [D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)] \times \right. \\
&\quad \left. \times [D(p) + 0.5p^2 R_1^2 J_n(pR_1)D_4(p) + 2(1-\nu_1)pR_1 J_n^2(pR_1)D_5(p)] - n^2 J_n(pR_1)D_3(p)D_4(p) \right\}
\end{aligned} \tag{30}$$

Розкладаючи в ряди за степенями pR_1 оператори, що входять у співвідношення (30), з прийнятою вище точністю та врахуванням позначень (9) будемо мати

$$\sigma_{\gamma\gamma}^* = \frac{2G_1(n^2 - 1)}{[2(1-\nu_1)n - (1-2\nu_1)]R_1} \bar{w}(z) \cos n\varphi. \tag{31}$$

Це співвідношення є узагальненням гіпотези Вінклера, яке раніше іншим способом, стосовно задачі стійкості циліндричної оболонки з наповнювачем, було одержано в [1].

В окремому випадку, коли $n = 0$, реакція пружного наповнювача знаходиться за формулами, наведеними в [5].

Запропонований метод значно скорочує шлях розв'язування задачі стійкості циліндричної оболонки з наповнювачем, бо дає змогу звести її до розв'язування відповідної крайової задачі для області, зайнятою циліндричною оболонкою при ускладнених граничних умовах на її внутрішній поверхні. При цьому наповнювач виключається з розгляду, а його вплив на стійкість оболонки враховується реакціями (27) або (30).

1. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчет оболочек с упругим заполнителем. – М.: Наука, 1987. – 260 с.
2. Мовсисян Г.А. К устойчивости цилиндрических оболочек с заполнителем при силовых и температурных воздействиях // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – 31. – № 2. – С. 5–12.
3. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементы теории пружности. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
4. Подстригая Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук, думка, 1978. – 344 с.
5. Воробець Б.С., Войтович М.І. До квазістатичної задачі термомпружності для тіл з лінійними включеннями // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2002. – № 45. – С. 25–28.

УДК 539.373

І.М. Голиборода

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

ДОСЛІДЖЕННЯ В ТЕРМІНАХ ФЕНОМЕНОЛОГІЧНОЇ СИНТЕЗНОЇ МОДЕЛІ ПОВЕРХНІ НАВАНТАЖЕННЯ ПРИ ЦИКЛІЧНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВИПРОБУВАННЯХ ПОЛКРИСТАЛІЧНОГО МАТЕРІАЛУ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ

© Голиборода І.М., 2004

На основі дворівневої феноменологічної моделі нелінійної деформації досліджується деформаційна поведінка матеріалів з пам'яттю форми на основі заліза. Описано трансформацію поверхні навантаження при термомеханічному навантаженні.

Deformational behavior of Fe-based Shape Memory materials is investigated. The investigation is realized in terms of the two-level phenomenological model of non-linear deformation. Transformation of the surface of loading is discussed.

Вступ. У матеріалах з ефектом пам'яті форми (ЕПФ) спостерігається взаємовплив деформаційних процесів принципово відмінної (мартенситної, дефектної, пружної) природи. Математичний опис цих процесів є актуальною проблемою. Ці явища мають бути необхідним чином враховані під час дослідження умов попереднього оброблення та застосування сучасних матеріалів з ЕПФ. Останнім часом особливого значення набувають матеріали з ЕПФ на основі заліза. Взаємовплив деформаційних процесів у цих матеріалах має особливо складний характер і потребує особливої уваги [1–3].

Деформаційна поведінка матеріалів з ЕПФ, в т. ч. в умовах взаємодії деформаційних процесів дефектного та мартенситного походження, останнім часом інтенсивно досліджується [1–2]. Відомі теорії в цілому можуть бути охарактеризовані як феноменологічні моделі із внутрішніми змінними, що базуються на принципах термодинаміки. Як правило, вони мають обмежене практичне застосування.

Опис нелінійної деформації в умовах взаємовпливу згаданих процесів реалізується в термінах ієрархічної феноменологічної моделі, побудованої на основі положень концепції ковзання [3–7]. В основі цієї концепції лежить припущення про зсувний характер деформації, яка проходить на мікрорівні. Дворівнева структура моделі робить можливим відтворення особливостей досліджуваних явищ. У [3–7] описано та враховано при розрахунках оборотну деформацію мартенситної природи, необоротну деформацію дефектного походження, пружну деформацію та деформацію теплового розширення. Тут розглянуто побудову поверхні навантаження (ПН) та опис її трансформації в межах згаданого підходу в умовах термомеханічних випробувань. Таке дослідження є важливим для повномасштабного обґрунтування моделі.

1. Основні положення теорії. У запропонованій моделі величина деформації вважається залежною від переміщення площин п'ятивимірного простору девіаторів Ілюшина під дією вектора навантаження; кожній площині відповідає певна система ковзання. Ця система ковзання є єдиною можливою системою для кожного виділеного об'єму, який відповідає нижньому рівню моделі (мезорівню [7]). При навантаженні окремі кристалічні елементи не взаємодіють між собою; полікристалічний характер середовища відображається різною орієнтацією відповідних площин девіаторного простору [8].

Площини девіаторного простору переміщуються паралельно один до одного, величина переміщення характеризує елементарний деформаційний акт. Якщо навантаження проводиться у тривимірному підпросторі згаданого простору девіаторів, яке визначається компонентами вектора S_1, S_2, S_3 , то деформація однозначно визначається по переміщенню слідів вказаних площин у тривимірному підпросторі; зв'язок між площиною п'ятивимірного простору (із нормаллю \bar{M}) та її слідом у тривимірному підпросторі (із нормаллю \bar{n}) визначається співвідношенням:

$$M_k = n_k \cos \lambda, \quad k=1,2,3, \quad (1)$$

де λ – кут між нормаллями \bar{M}, \bar{n} .

Напрявні косинуси нормалі до площини тривимірного підпростору задаються у спеціальній сферичній системі координат, пов'язаній за допомогою кутів α, β із вектором навантаження \bar{S} : β – кут між \bar{S} та \bar{n} ; α – кут між проекцією \bar{n} на площину W , яка є нормальною до \bar{S} та перетинає початок координат, та L – лінією перетину W з координатною площиною S_1OS_2 . Запропонована система координат та пов'язаний із нею спосіб усереднення фактично реалізують суміщення вектора навантаження із координатною віссю i , отже, забезпечують зображення компонент вектора деформації у скінченному вигляді при довільному пропорційному навантаженні.

При описі необоротної деформації дефектного походження у змінному температурно-

силовому полі на нижньому структурному рівні моделі може бути застосована формула:

$$d\Psi = d\varphi - K_0(T, S)\Psi dt; \Psi \geq 0. \quad (2)$$

У цій постановці φ – інтенсивність необоротної деформації (величина, яка є усередненою неперервною характеристикою дисторсії кристалічної ґратки під час деформування; у термінах цієї моделі вона визначається зміщенням площин стосовно початкового положення під дією вектора навантаження; задається у мезооб’ємі, який визначається нормаллю \bar{M}); Ψ – інтенсивність зміцнення або інтенсивність дефектів (величина, яка є усередненою неперервною характеристикою рівня розвитку дефектів кристалічної структури під час деформування, і в термінах моделі є однозначно пов’язаною із положенням площин п’ятивимірного простору – вважається, що площини з часом можуть поступово прямувати до початкового положення). Параметр K_0 визначається рівнем температури та абсолютною величиною вектора навантаження, він характеризує інтенсивність мікроструктурних процесів, які проходять у часі. Рівняння (2) в цілому говорить про те, що необоротна деформація стимулює появу неоднорідностей будови полікристала, цей процес поєднується із одночасною релаксацією дефектів. Це припущення зокрема відповідає гіпотезі Бейля–Орована [9]. У термінах (2) може бути описана “миттєва” пластична деформація та усталена повзучість. Можливою формою зображення параметра K_0 є:

$$K_0(T, S) = K_1(T, S) + K_2(T)H(-d|\bar{S}|) + K_3(S)H(S^* - S)H(-d|T|)H(T - M_s^c), \quad (3)$$

де $H(x)$ – ступенева функція Гевісайда ($H(x) = 1, x > 0$; $H(x) = 0, x \leq 0$). Величина $K_1(T, S)$ визначає інтенсивність повзучості і може відповідати рівню концентрації вакансій при заданому навантаженні та температурі [10] визначення інших величин буде розглянуто нижче.

При проходженні необоротної деформації дислокаційного походження спостерігається зміцнення матеріалу, яке визначається зміною віддалі відповідної площини (із нормаллю \bar{M}) від початку координат і залежить від початкової здатності матеріалу до деформації (початкової міцності), деформаційного зміцнення та зміцнення, що визначається швидкістю зміни прикладеного навантаження. Тому спостерігається залежність:

$$H_M = F(R, \Psi, R_M, I_M, -f_M), \quad (4)$$

де H_M – результуюча віддаль до площини з нормаллю \bar{M} . Для випадку проходження необоротної деформації дислокаційного походження $H_M = (\bar{S}\bar{M})$.

Перший аргумент, R – вихідна – до початку процесу необоротної деформації – віддаль від початку координат до поверхні навантаження (відповідає початковій міцності матеріалу):

$$R = \sqrt{2/3}\sigma_p, \quad (5)$$

де $\sigma_p(T)$ – напруження початку необоротних формозмін (під час розтягання), яке залежить від температури. Як і раніше [3–7], ми розрізняємо два поняття – межу пластичності та межу необоротних формозмін; під першим розуміється напруження початку формозмін при достатньо інтенсивному навантаженні з урахуванням швидкісних ефектів та попередніх циклічних випробувань.

Наступні два аргументи в (4) визначають переміщення площин, яке відповідає деформаційному зміцненню (другий аргумент відповідає зміцненню, яке залежить від рівня прикладеної температури і може зніматися при знакозмінному навантаженні, третій аргумент, що не зменшується, характеризує рівень пошкоджуваності матеріалу [11]). Четвертий та п’ятий аргумент задають додаткові переміщення, які можуть зменшуватись (релаксувати) із часом. Вони відповідають зміцненню, пов’язаному із швидкісним навантаженням, та зміцненню (або знеміцненню), породженому перепадами температур. Введення третього та четвертого аргументів – релаксуючого та нерелаксуючого параметрів – у формулу (4) відповідає дії орієнтованих мікронапружень (ОМН) у площині з нормаллю \bar{M} ; п’ятий аргумент відповідає дії неорієнтованих мікронапружень (НОМН) [2, 10]. Урахування напружень, здатних до релаксації, дає змогу відобразити швидкісні ефекти (зокрема неусталену повзучість). Згадані величини визначаються згідно з формулами:

$$dI_M = r_1 H(d|\vec{S}|) d[(\vec{S}, \vec{M})] - h(T) I_M(t) dt,$$

$$dR_M = \begin{cases} r_2 d[(\vec{S}, \vec{M})], & |dR_M| \geq 0; \\ 0, & |dR_M| < 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$df_M = r_3 (\vec{S}, \vec{M}) dT - p(S) f_M dt, \text{ нпу} : df_M \geq 0; \quad df_M = 0, \quad \text{нпу} : df_M < 0$$

$$r_1 = a_i (c_r + d_r (E - E_c) H(E - E_c))^{-1}; \quad r_2 = a_r (c_r + d_r (E - E_c) H(E - E_c))^{-1};$$

$$h(T) = h_1(T) H(d|\vec{S}|) + h_0(T), \quad a_i, a_r, c_r, d_r = \text{const}; \quad E = \int (|d\varepsilon_m| / ds) ds - \text{довжина шляху інтегрування по мартенситному каналу}; \quad E_c \text{ відповідає рівню розвитку дислокаційної структури, характерному для тренованого матеріалу}; \quad E_c = \text{const} [6, 7]; \quad r_3 = b_f (c_f + d_f (E - E_c) H(E - E_c))^{-1};$$

$$b_f, c_f, d_f = \text{const} \quad (\text{надалі, не обмежуючи загальності, вважаємо: } p(S) \equiv 0).$$

Враховуючи попередні міркування, інтенсивність дефектів може бути задана у вигляді:

$$\Psi = a[(H_M / \sqrt{2/3} \sigma_p(T))^2 - 1 - c_1 I_M - c_2 R_M + c_3 f_M], \quad (7)$$

де $c_i = c_1^i H(\vec{S}) + c_2^i H(-\vec{S})$; $a, c_j^i = \text{const}$; $j = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$ (припускається, що мікронапруження при стиску та розтягу можуть проявлятися по-різному).

Надалі вважаємо, що рівняння (7) є чинним лише в період збільшення інтенсивності необоротної деформації, в той час як співвідношення (2) виконується упродовж всього процесу дослідження інтенсивності дефектів (в тому числі і коли приросту необоротної деформації нема).

Параметр σ_p задається у вигляді:

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma_{p1} = z_1 S_p, & M_s \leq T \leq M_s^\sigma, \\ \sigma_{p2} = z_1 K^{-1} \frac{M_s^\sigma - M_s}{T_{ml} - M_s^\sigma} (T_{ml} - T), & M_s^\sigma \leq T \leq T_{con}, \\ \sigma_{p3} = \sigma_{p2}(T_{con}), & T_{con} \leq T, \end{cases} \quad (8)$$

У формулі (8) $z_1 = \text{const}$; M_s, M_f – характеристичні температури прямого мартенситного перетворення [2]; M_s^σ – максимальна температура, при якій спостерігається аномальна залежність межі формозмін від температури (лінійне збільшення σ_p із зростанням температури), T_{con}, T_{ml} – характеристичні температури матеріалу; $T_{con} \leq T_{ml}$; T_{ml} – не перевищує температури плавлення матеріалу. S_p – характеристичне напруження початку прямого механомартенситного перетворення при одноразовому навантаженні [2, 4, 5]; $S_p = (T - M_s) / K$ (рис. 1; тут і далі криві I – дані експерименту [12], II – результати розрахунків). Таке зображення межі формозмін відповідає фізичним властивостям матеріалу [12].

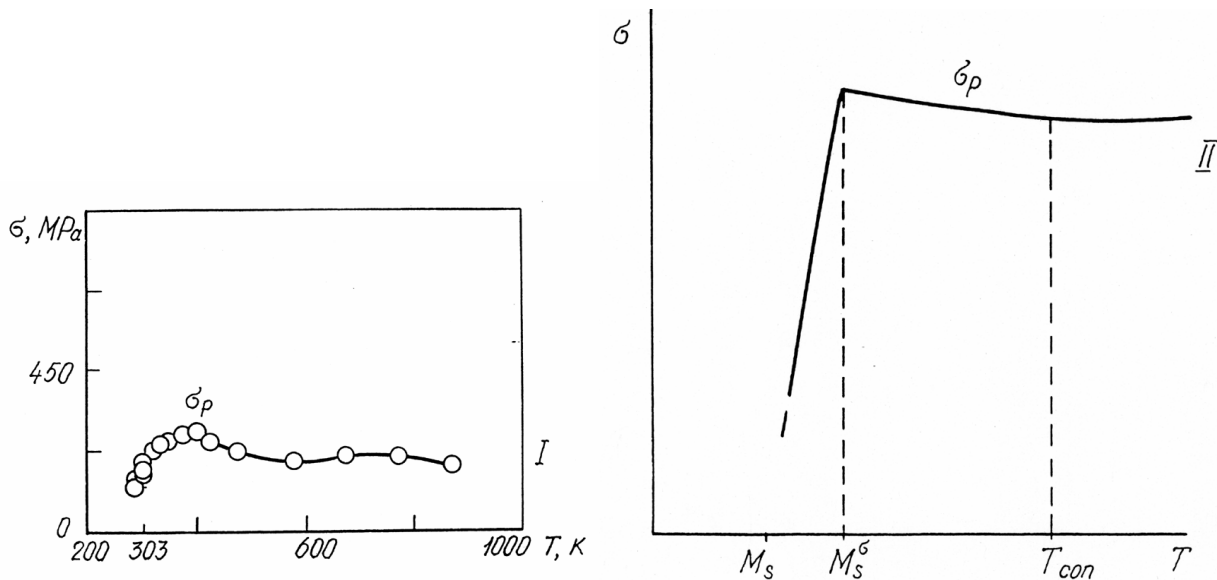


Рис. 1. Межа необоротних формозмін в околі температури початку прямого механомартенситного перетворення

На макрорівні компоненти вектора необоротної деформації дефектного походження визначаються за формулою:

$$\varepsilon_k^p = \iiint_{\Omega_1} d\Omega_1 \int_t M_k(d\varphi/ds) ds \quad \Omega_1 = \Omega_1(\alpha, \beta, \lambda) \quad (9)$$

Межу області необоротної деформації (ОНД) знаходимо з умови:

$$\Psi(\lambda, \beta, \vec{S}, T, t) = 0. \quad (10)$$

2. Дослідження поверхні навантаження. Розглядаються циклічні випробування в режимі: навантаження за програмою $S = S_h + B(t - t_j)$; ($j = 4N + 1, N = 0, 1, 2, \dots$) до величини S_{max} (1-й етап циклу, $t \geq t_{4N+1}$), витримка при максимальному навантаженні (2-й етап, $t \geq t_{4N+2}$), розвантаження до вихідного значення $S = S_h$ (3-й етап, $t \geq t_{4N+3}$), далі нагрів до температури $T = T_{max}$ та охолодження до початкового рівня $T = T_h$ (4-й етап, $t \geq t_{4N+4}$).

2.1. Навантаження. У межах цієї концепції поверхня навантаження початково є огинаючою сімейства площин, дотичних до сфери радіуса $\sqrt{2/3}\sigma_p$ (рис. 2, лінія 1). Необоротна деформація починається із рухом площин під дією вектора \vec{S} . Згідно з (2) необоротна деформація стимулює появу неоднорідностей будови полікристала, одночасно проходить релаксація дефектів. При швидкому зростанні прикладеного навантаження приріст інтенсивності дефектів спостерігається за малий період часу, релаксація не встигає пройти і рівняння (2) описує “миттєву” пластичну деформацію:

$$d\psi = d\varphi. \quad (11)$$

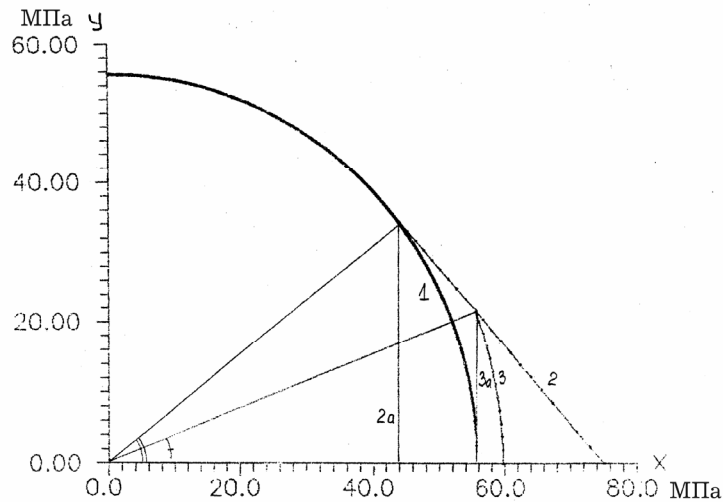


Рис. 2. Передній бік поверхні навантаження. Перетин в площині, в якій лежить вектор навантаження \vec{S} (зображена симетрична півплощина). Вісь X скерована вздовж осі вектора навантаження ($\beta = 0$), вісь Y відповідає напрямку \vec{n} при $\beta = \pi/2$.

1 – початкова сферична поверхня; 2 – ПН при навантаженні (розтяг) за межу пластичності. Є конус, накладений на початкову сферу. Основа конусу – лінія перетину ПН із початковою сферою; 2a – проекція лінії перетину (межа основи конуса) на площину, в якій лежить вектор \vec{S} . Ширина основи визначається кутом β_1 ; 3 – ПН після розвантаження та повернення площин, зміщених під дією вектора навантаження (мікронапруження відмінні від нуля); 3a – проекція межі ОНД по куту β (лежить на поверхні конуса 2) на площину, в якій лежить вектор \vec{S} . Ширина ОНД визначається кутом β_1^*

Напруження початку необоротної деформації S^* (відповідає межі пластичності) визначаємо з (10) при $\lambda = \beta = 0$. При подальшому навантаженні ПН є конусом, накладений на початкову сферичну поверхню (рис. 2, лінія 2):

$$H_M = \begin{cases} \sqrt{2/3}\sigma_p(T_h), & \beta_1 \leq \beta \leq \pi/2; \\ S \cos \beta \cos \lambda, & 0 \leq \beta \leq \beta_1. \end{cases} \quad (12)$$

Вершина конуса збігається із кінцем вектора \vec{S} ія основа конуса (лінія його перетину із сферою) визначається координатним кутом β_1 ія $0 \leq \beta_1 \leq \pi/2$; я $\cos \beta_1 = \sqrt{2/3}\sigma_p/S$; я $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$; я $\cos \lambda_1 = \cos \beta_1 / \cos \beta$ (рис. 2) я Межа ОНД я лінією перетину конуса із поверхнею яка визначає межу повернення площин (МПП) я внаслідок розвантаження ія повної релаксації ія інтенсивності дефектів я Фактична МПП я визначає зміцнення матеріалу я внаслідок швидкісних ефектів я пошкоджуваності я 2а я 2м пера 2урної дії я Віддаль я від я 2Ю я для МПП яписується я співвідношенням: я

$$H_M = \sqrt{2/3}\sigma_p (1 + c_1 I_M(t) + c_2 R_M - c_3 f_M)^{1/2}. \quad (13)$$

Ширина ОНД по координатному куту β визначається кутом β_1^* ; $0 \leq \beta_1^* \leq \beta_1$ (рис. 2), який знаходимо з рівняння (10).

2.2. Витримка при сталому навантаженні. При сталому $S = S_{\max}$ виконується:

$$d\varphi = d\Psi + K_0(T, S)\Psi dt. \quad (14)$$

Перший доданок правої частини (14) є “відповідальним” за неусталену повзучість. За рахунок

релаксації мікронапружень ($I_M(t)$) інтенсивність дефектів збільшується. Відповідно ОНД розширюється (по куту β), перетин МПП із конусом самопаралельно переміщується вздовж осі конуса у напрямку початку координат (межа ОНД відповідає межі МПП на поверхні конуса). Отже, спостерігається поступова додаткова зміна положення МПП, що зумовлює накопичення деформації неусталеної повзучості. Другий доданок визначає усталену повзучість, яка йде за рахунок того, що вектор навантаження “тримає” зміщені площини і не дає їм повернутися у початкове положення.

Про2илежнийя напрямкуя дія \vec{S} я бікя ПНя ($\pi/2 \leq \beta \leq \pi$) я 2акожя 2рансформує2ся. Приймає2ся:яя

$$\Psi_{-M} = -g\Psi_M; I_{-M} = -gI_M; R_{-M} = -gR_M; f_{-M} = -gf_M \quad \text{я} \quad (15)$$

Прияцьомуя $g \leq 1$; $g = g_1 H(\vec{S}) + g_2 H(-\vec{S})$ я(припускає2сяящояприяє2искуя2аяроз2ягуя про2илежнія напрямкуя наван2аженняя с2оронія ПНя можу2ья 2рансформуватисяя по-різному)я Уя випадку $c_1 = c_3 = 0$ я віддалья відя поча2куя координатя доя ПНя визначає2сяя співвідношенням:

$$H_{-M} = \sqrt{2/3} \sigma_p (T_h) (1 + \Psi_{-M} + c_2 R_{-M})^{1/2}. \quad (16)$$

Відповідноя доя (6) я (15) я 2римаємо:яя

$$H_{-M} = ((2/3) \sigma_p^2 (1 + g) - g S^2 \cos^2 \beta \cos^2 \lambda)^{1/2}. \quad (17)$$

Отже, віддаль від початку координат до задньої сторони ПН зменшується, у цих напрямках відбувається зменшення матеріалу. Межі трансформованої ділянки ПН визначаються кутом β_1^- ; $|\cos \beta_1^-| = \sqrt{2/3} \sigma_p / S$ (відміряється від осі вектора навантаження). Отже, $\beta_1^- = \beta_1$, ширина трансформованої задньої ділянки дорівнює ширині основи конуса. Задня сторона ПН залишається опуклою за умови:

$$|S| \leq \sqrt{2/3} \sigma_p ((1 + \sqrt{1 - g}) / g)^{1/2}. \quad (18)$$

2.3. Розвантаження. Якщо тепер у момент $t = t_{4N+3}$ починається розвантаження, то приріст необоротної деформації припиняється, рівняння (2) набере вигляд:

$$d\psi = -K_0(T, S) \psi dt. \quad (19)$$

Внаслідок розвантаження, коли дія вектора \vec{S} на переміщені площини припиняється, відбувається їх самопаралельне повернення до початкового положення і, відповідно, зворотна трансформація ПН. При цьому приріст інтенсивності дефектів отримується із від’ємним знаком і рівняння (2) описує релаксацію дефектів. Розв’язавши (2), отримуємо формулу, яка описує інтенсивність дефектів у період їх релаксації – Ψ^* :

$$\Psi^* = \Psi(t \geq t_{4N+3}) = [\Psi(t_{4N+3})] \text{EXP}(-K_0(T, S)(t - t_{4N+3})). \quad (20)$$

Релаксація дефектів відбувається всюди в області, де інтенсивність дефектів була відмінною від нуля під час витримки при максимальному навантаженні і де, згідно з (10), проходила необоротна деформація. Ця область задається координатними кутами α, β, λ і займає внутрішній об’єм конуса ПН, знизу обмежується МПП. Після зняття швидкісного зміцнення, зворотної трансформації конуса ПН і повної релаксації Ψ^* передній бік поверхні навантаження описується співвідношенням (рис. 2, лінія 3):

$$H_M = \begin{cases} \sqrt{2/3} \sigma_p (T_h), & \beta_1 \leq \beta \leq \pi/2; \\ S_{\max} \cos \beta \cos \lambda, & \beta_1^* \leq \beta \leq \beta_1; \\ \sqrt{2/3} \sigma_p (T_h) (1 + c_2 R_M(\beta, \lambda) - c_3 f_M(\beta, \lambda))^{1/2} & 0 \leq \beta \leq \beta_1^* \end{cases} \quad (21)$$

При цьому величину β_1^* ($0 \leq \beta_1^* \leq \beta_1$) знаходимо з (10), яке перепишемо у вигляді:

$$\Psi(\lambda, \beta, S_{\max}, T_h, R_M(t_{4N+3}), f_M(t_{4N+3})) = 0. \quad (22)$$

Припущення щодо поступової (з часом) релаксації інтенсивності дефектів внаслідок розвантаження є обгрунтованим для режимів із повільною зміною зовнішніх параметрів \vec{S}, T . У деяких випадках, зокрема, коли проміжок часу між двома циклами навантаження є малим, слід вважати, що релаксація інтенсивності дефектів відбувається миттєво і, згідно з (3), при великих значеннях параметра $K_2(T)$ виконується: $\Psi^* \rightarrow 0$.

Як і в підвипадку навантаження при розвантаженні самопаралельні площини зберігають своє розміщення площини зберігають свою орієнтацію в просторі координатних кутових відношень до початкової площини. Це зокрема означає, що при навантаженні м'яка дає можливість розташування площини знову до початкової площини. ПН визначає межі ОНД (по куту β) стосовно цієї сфери. В розрахунках ми приймаємо радіус ПН незмінним та таким, який дорівнює межі необоротних формозмін $\sqrt{2/3}\sigma_p$ (дія мікронапружень враховується при визначенні інтенсивності дефектів та ОНД). Протилежний бік ПН при розвантаженні не змінює площини, які розміщуються в напрямку початкової координати, а повертаються до початкового положення лише внаслідок прямої дії вектора \vec{S} . Надалі не обмежуючи загальної вважаємо, що при неповному розвантаженні $S_h < \sqrt{2/3}\sigma_p$ і зоб'язуючи необоротної деформації (повзучості) в період з термічної витримки при $S = S_h$ немає

При проміжному (повторному) навантаженні $\vec{S} = \vec{S}_h$, коли $\sqrt{2/3}\sigma_p \leq S_k \leq S_{max}$ ПН приймає вигляд у відношенні:

$$H_M = \begin{cases} \sqrt{2/3}\sigma_p(T_h), & \beta_1 \leq \beta \leq \pi/2; \\ S_{max} \cos \beta \cos \lambda, & \beta_1^* \leq \beta \leq \beta_1; \\ \sqrt{2/3}\sigma_p(T_h)(1 + c_1 I_M(\beta, \lambda, t) + c_2 R_M(\beta, \lambda) - c_3 f_M(\beta, \lambda))^{1/2}, & \beta_1^h \leq \beta \leq \beta_1^* \\ S_k \cos \beta \cos \lambda, & 0 \leq \beta \leq \beta_1^h. \end{cases} \quad (23)$$

З β_1^h знаходимо в β_1 і β_1^* в вигляді:

$$\Psi(\lambda, \beta, S_k, T_h, I_M(t), R_M, f_M) = 0 \quad (24)$$

2.4. Зміна температури. У період нагрівання від T_h до T_{max} і охолодження до початкового рівня ПН також зазнає трансформації. Межа необоротних формозмін задається формулою (8) (рис. 1). Отже сферична поверхня ПН під час нагрівання спочатку ізотропно розширюється, а потім звужується (відповідно змінюється віддаль від т.О до дотичних площин, які самопаралельно переміщуються). Тому під час нагрівання при $T > M_s^\sigma$ і $\sigma_p(T) < \sigma_p(T_h)$ вектор навантаження, довжина якого є сталою і становить S_h , може торкнутися ПН, радіус якої достатньо зменшився, і за певною температурою $T = T'$ почнеться необоротна деформація. При подальшому нагріванні, згідно з (8), радіус ПН продовжує зменшуватись. Відповідно, все більше площин, дотичних до ПН, наштотхуються на вектор навантаження, утримуються ним і виявляються зміщеними відносно інших площин. ПН трансформується у конус, вершина якого збігається з кінцем вектора \vec{S} , накладений на сферичну поверхню, радіус якої змінюється із температурою. Рівняння (2) набирає вигляду (11). Межа ОНД на перетині конуса задається кутом β_1^T , який знаходимо з рівняння:

$$\Psi(\lambda, \beta, S_h, T, I_M(t), R_M, f_M) = 0 \quad (25)$$

При цьому загальні межі трансформованої (несферичної) частини ПН як і раніше визначаються кутом $\beta_1^* > \beta_1^T$. У разі охолодження до початкової температури радіус ПН в кінцевому рахунку знову дорівнює $\sqrt{2/3}\sigma_p(T_h)$. Віддаль до поверхні навантаження описується форму-

лами (21) (при $0 \leq \beta \leq \pi/2$) та (16) (при $\pi/2 \leq \beta \leq \pi$). Під час охолодження приросту необоротної деформації нема. Площини, які виявилися зміщеними внаслідок зміни радіусу сфери, при $T = T_h$ опиняються у початковому положенні; згідно з (3) при відповідному значенні $K_3(S)$ спостерігається повна релаксація інтенсивності дефектів:

$$\Psi^*(t \geq t_{4N+4}) \rightarrow 0. \quad (26)$$

Зауважимо, що при зміні температури без попередніх силових випробувань анізотропного зміцнення нема, радіус сфери ПН ізотропно змінюється у всіх напрямках і макродеформація дорівнює нулю. При проведенні попередніх силових випробувань і наявності певного прикладеного навантаження, необоротна деформація при термозмінах може проходити і за відсутності неорієнтованих (теплових) мікронапружень.

2.5. Повторне навантаження. Нехай тепер при $t = t_{4N+1}$ ($N = N+1$) починається наступний цикл. Інтенсивність дефектів має зростати, проте у випадку неповної попередньої релаксації Ψ (тобто, якщо (26) не виконується і $\Psi^*(t \geq t_{4N+1}) > 0$) ця величина збільшується не від нуля, а від певної невід'ємної величини. Позначимо надалі через Ψ_a інтенсивність дефектів, яка визначається згідно з (7). Тоді момент відновлення необоротної деформації – t' (і, відповідно, напруження відновлення деформації, S^*) визначимо числовим методом із співвідношення:

$$\Psi_a(t', \beta = 0, \lambda = 0) = \Psi^*(t', \beta = 0, \lambda = 0). \quad (27)$$

При $t \geq t'$ інтенсивність дефектів описується співвідношенням (7), область реалізації необоротної деформації визначається співвідношенням:

$$\Psi_a(t) - \Psi^*(t') = 0. \quad (28)$$

При повторному навантаженні ПН описується (23), необоротна деформація визначається згідно з (9). Цей спосіб визначення інтенсивності дефектів та необоротної деформації є дійсним для довільного циклу випробувань.

Висновки. У термінах запропонованої моделі [4–7] описана необоротна деформація полікристалічного матеріалу в умовах одночасної реалізації різноманітних мікроструктурних процесів, в т. ч. оборотного мартенситного перетворення, при складних термосилових режимах випробувань. Враховуються суттєві закономірності прояву та взаємовпливу цих процесів, сукупні дії різних груп залишкових напружень залежно від історії випробувань. Процес необоротної деформації відображається переміщенням відповідної множини площин п'ятивимірного простору девіаторів Іллюшина. Проведене дослідження поверхні навантаження при циклічних термомеханічних випробуваннях дозволяє підтвердити достовірність та обґрунтованість моделі, точніше описати деформаційний процес.

1. Bo Z., Lagoudas D. *Thermomechanical modelling of polycrystalline SMAs under cyclic loading* // *Int. J. Eng. Sci.* – 1998. – 36. – P. 1–150. 2. Лихачев В.А., Малинин В.Г. *Структурно-аналитическая теория прочности.* – Санкт-Петербург: Наука, 1993. – 472 с. 3. Голиборода І.М. *Опис взаємовпливу деформаційних процесів дефектної та мартенситної природи в термінах синтетичної моделі* // *Проблеми міцності.* – 1998. – № 6. – С. 124–131. 4. Holyboroda (Goliboroda) I., Rusinko K., Tanaka K. *Description of an Fe-based shape memory alloy thermomechanical behaviour in terms of the synthetic model* // *Computational Materials Science.* – 1999. – № 13. – P. 218–226. 5. Голиборода І.М. *Опис необоротної деформації, пружної деформації та деформації теплового розширення полікристалу в умовах оборотного мартенситного перетворення* // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* – 2001. – 44, № 1. – С.114–123. 6. Голиборода І.М. *Оборотна мартенситна деформація сплавів з ефектом пам'яті форми з урахуванням трансформації структури* // *Проблеми міцності.* – 2002. – № 2. – С. 53–61. 7. Голиборода І.М. *Нелінійна деформація полікристалічних матеріалів з пам'яттю форми на основі заліза в термінах феноменологічної теорії* // *Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка".* – 2004. – № 483. – С. 30–40. 8. Батдорф С.Б., Будянский Б.В. *Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения* / Сб. пер. – *Механика.* –

1962. – № 1. – С. 135–155. 9. Orowan E. The creep of metals // *J. West Scotland Iron Steel. Inst.* – 1946. – Vol. 54. – P. 45–59. 10. Голиборода И. М. Влияние температурных эффектов на деформацию ползучести // *Вестн. Львов. политехн. ин-та.* – 1987. – № 210. – С. 33–34. 11. Ильющин А. А. Теория пластичности. – М., 1963. – 295 с. 12. Tanaka K., Hayashi T., Nishimura F. and Tobushi H. Hysteretic behavior in an Fe-Cr-Ni-Mn-Si polycrystalline shape memory alloy during thermomechanical cyclic loading // *J. of Mater. Engineering and Perform.* – 1995. – 3, № 2. – P. 135–143. 13. Чернов Д.Б. Перспективы создания термомеханических устройств // *Материалы XXXII семинара “Акт. Проблемы прочности”*, 12–14 ноября 1996 г. – СПб, 1997. – С. 97–105. 14. Tanaka K., Hayashi T., Nishimura F. and Tobushi H. Hysteretic behavior in an Fe-Cr-Ni-Mn-Si polycrystalline shape memory alloy during thermomechanical cyclic loading // *J. of Mater. Engineering and Perform.* – 1995. – 3, № 2. – P. 135–143. 15. Tanaka K., Nishimura F., Tobushi H., Oberaigner E.R. and Fischer F.D. Thermo-mechanical behavior of an Fe-based shape memory alloy: transformation conditions and hysteresis // *Proc. ICOMAT 95, J. Phys. IV.* – 1995. – 5(8). – P. 463–468.

УДК 621.452.3.011

П.П. Григор’єва, О.Д. Шамровський
Запорізький державний університет

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧОГО КОЛЕСА ГАЗОТУРБІННОГО ДВИГУНА

© Григор’єва П.П., Шамровський О.Д., 2004

З ціллю дослідження власних форм коливань осьового колеса компресора газотурбінного двигуна і побудови надалі вібраційного критерію пошкоджень пропонується дискретна модель такого колеса, метод розв’язання моделі, а також оцінюється адекватність моделі на базі експериментальних даних. Диск і лопатки розглядаються як єдина система із великою кількістю ступенів вільності, яку можна знизити, враховуючи симетрію системи, за допомогою теорії зображень груп.

With the aim of research of the gas-turbine engine compressor axled wheel natural modes and formulating in the future a vibration criteria of damages a discrete model of such wheel is proposed, as well as a method of solving of the model. An adequacy of the model is estimated on the base of the experimental data. The disk and the blades are concern as a single whole, as a system with many degrees of freedom. A dimension if the problem can be reduced by the taking into account symmetry of the system by means of representation theory.

Вступ. Розвиток авіаційної техніки і необхідність підвищення надійності газотурбінних двигунів (ГТД) спричинили велику кількість експериментальних та теоретичних досліджень, що розглядають питання діагностики, проектування, експлуатації і технології виготовлення ГТД. Ефективність теоретичних досліджень значною мірою визначається математичною моделлю, що застосовується. Згідно із сучасними уявленнями моделювання може бути зображено у вигляді такої послідовності: явище, що досліджується – математичні моделі – числові алгоритми – програмування – ЕОМ – обчислення та їх аналіз – оброблення і зберігання результатів [1]. Інакше кажучи, математична модель повинна не тільки відповідати об’єктові, що досліджується, але й забезпечувати можливість аналізу вихідної інформації доступними сучасними засобами. Задача пристосування моделей і методів до оброблення на ЕОМ є нетривіальною. З одного боку, є актуальним питання про дискретизацію неперервних моделей, яка потребує удосконалення старих і створення нових числових методів [2, 3]. З іншого боку, є важливим розвиток методів роботи з моделями систем, яким властива велика кількість ступенів вільності [4] із подальшою адаптацією таких методів до автоматичних засобів аналізу. Математичні засоби дослідження неперервних моделей добре розвинуті, але аналіз поведінки таких