УДК 539.3

Б.С. Воробець, В.О. Волос*, Р.В. Лампіка**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів,
* кафедра теорії математичної обробки геодезичних вимірів,
** кафедра електронного машинобудування.

ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ ПРУЖНОГО НАПОВНЮВАЧА СТОСОВНО ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Стосовно розв’язування задач стійкості запропоновано методику визначення реакції пружного наповнювача при його контактній взаємодії з циліндричною оболонкою. Систему лінійних рівнянь, що описує нейтральну рівновагу наповнювача, розв’язано операторним методом, що дало змогу записати формули для визначення реакції наповнювача через значення переміщень на поверхні контакту. Розглянуто випадки ідеального і нормального механічного контакту.

Concerning the solving of stability problems we propose a method of evaluating the reaction of elastic core that interacts contactly with cylindrical shell. The linear system of equations describing neutral equilibrium of the core is solved by symbolic method. This leads to formulas expressing reaction of the core in terms of displacements on the contact surface. The cases of ideal and normal mechanical contact between shell and core are considered.

Кругова циліндрична оболонка і контактуючий з нею наповнювач є конструктивними елементами багатьох машин і апаратів. Так, наприклад, циліндричну оболонку, що містить пружний наповнювач, можна розглядати як найпростішу модель ракетного твердопаливного двигуна.

Задачі взаємодії оболонки і пружного наповнювача формулюються по-різному, починаючи від моделювання наповнювача основою Вінклера [1] та закінчуючи чіткою постановкою, яка ґрунтується на сумісному розв’язанні рівнянь напружено-деформованого стану для системи: оболонка-наповнювач [1, 2]. Точна постановка задачі доволі часто призводить до значних математичних труднощів, які інколи неможливо подолати.

Слід зауважити, що при розв’язуванні рівнянь, які описують пружну рівновагу циліндричної оболонки з наповнювачем, достатньо знати лише напруження на внутрішній поверхні оболонки, тобто поверхні контакту. Ці напруження є не чим іншим як реакціями пружного наповнювача, що діють на поверхні контакту.

Тут пропонується стосовно задач стійкості методика визначення реакції наповнювача при його контактній взаємодії з циліндричної оболонкою.

Розглянемо циліндричну оболонку завтовшки $2h$ і радіусом серединної поверхні R, що містить пружний наповнювач у формі круглого стрижня радіуса R_1, причому жорсткість наповнювача значно менша від жорсткості оболонки. Припустимо, що на поверхні розмежування матеріалів виконуються умови ідеального контакту. Якщо віднести оболонку до триортогональної системи координатних ліній z, φ, γ, які є відповідно лініями головних кривин серединної поверхні і зовнішньою нормаллю до неї, а наповнювач – до циліндричної системи координат r, φ, z, причому координатні лінії z, φ збігаються як для оболонки, так і для наповнювача, то умови ідеального механічного контакту запишуться так

$$u_r^{(1)}(R_1,\varphi,z)=w(z,\varphi),\quad u_z^{(1)}(R_1,\varphi,z)=U(-h,z,\varphi)=U_*,\quad u_\varphi^{(1)}(R_1,\varphi,z)=V(-h,z,\varphi)=V_*, \qquad (1)$$

$$U_* = u(z,\varphi) + h\frac{\partial w}{\partial z}; \quad V_* = v(z,\varphi) + \frac{h}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(1)}(R_1,\varphi,z) &= \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(-h,z,\varphi) = \sigma_{\gamma\gamma}^*, \\
\sigma_{r\varphi}^{(1)}(R_1,\varphi,z) &= \sigma_{\gamma\varphi}^{(1)}(-h,z,\varphi) = \sigma_{\gamma\varphi}^*, \\
\sigma_{rz}^{(1)}(R_1,\varphi,z) &= \sigma_{\gamma z}^{(1)}(-h,z,\varphi) = \sigma_{\gamma z}^*,
\end{aligned} \tag{3}$$

де r, φ, z – радіальна, колова (кутова) та осьова координати; γ – координата, яка відраховується від серединної поверхні оболонки; $u_r^{(1)}, u_\varphi^{(1)}, u_z^{(1)}$ – переміщення точок матеріалу наповнювача у радіальному, коловому та осьовому напрямках; w – прогини оболонки; U_*, V_* і u, v – переміщення в осьовому та коловому напрямках точок поверхні контакту ($\gamma = -h$) і серединної поверхні оболонки ($\gamma = 0$) відповідно; $\sigma_{ij}^{(1)}$ $(i, j = r,\varphi,z)$ і σ_{ij} $(i, j = z,\varphi,\gamma)$ нормальні ($i = j$) та дотичні ($i \neq j$) напруження в наповнювачі та оболонці відповідно; $\sigma_{\gamma\gamma}^*, \sigma_{\gamma z}^*, \sigma_{\gamma\varphi}^*$ – нормальні та дотичні напруження оболонки, що діють на поверхні контакту $\gamma = -h$. Тут і надалі індекс "1" відносить відповідні величини до наповнювача, а без індексу – до оболонки.

Визначимо напруження в наповнювачі на поверхні розмежування матеріалів. Для цього використаємо співвідношення тривимірної задачі теорії пружності [3]:

а) рівняння рівноваги у переміщеннях

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1-2\nu_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial r} + \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u_r^{(1)} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{1}{1-2\nu_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} + \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u_\varphi^{(1)} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial\varphi} = 0, \\
\frac{1}{1-2\nu_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial z} + \Delta u_z^{(1)} = 0, \quad \theta_1 = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z};
\end{gathered} \tag{4}$$

б) геометричні рівняння Коші

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{u_r^{(1)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial\varphi}, \quad \varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}, \\
\gamma_{rz}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}, \quad \gamma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial\varphi}, \quad \gamma_{r\varphi}^{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r};
\end{gathered} \tag{5}$$

в) рівняння закону Гука

$$\sigma_{ii}^{(1)} = 2G_1\left(\varepsilon_i^{(1)} + \frac{\nu_1}{1-2\nu_1}\theta_1\right), \quad \sigma_{ij}^{(1)} = G_1\gamma_{ij}^{(1)}, \quad G_1 = \frac{E_1}{2(1-\nu_1)}, \quad i, j = r,\varphi,z, \tag{6}$$

де $\varepsilon_i^{(1)}, \gamma_{ij}^{(1)}$ $(i, j = r,\varphi,z)$ – відносні лінійні та зсувні деформації; θ_1 – об'ємна деформація; G_1 – модуль зсуву матеріалу наповнювача; E_1, ν_1 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу; Δ – оператор Лапласа, який має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Якщо перше рівняння рівноваги (4) продиференціювати по r, друге – по φ, попередньо помноживши його на r^{-1}, а третє – по z, і одержані таким чином рівняння просумувати, то одержимо

$$\Delta\theta_1 = 0. \tag{8}$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати операторним методом [4], згідно з яким лапласіан (7) треба подати у вигляді

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+p^2,\quad p=\frac{\partial}{\partial z}. \tag{9}$$

Тоді стосовно задач стійкості циліндричної оболонки з наповнювачем [1] розв'язок рівняння (8) запишемо таким чином

$$\theta_1(r,\varphi,p)=\overline{\theta_1}(r,p)\cos n\varphi\quad (n\in N), \tag{10}$$

де функція $\overline{\theta_1}(r,p)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2\overline{\theta_1}}{d(pr)^2}+\frac{1}{pr}\frac{d\overline{\theta_1}}{d(pr)}+\left(1-\frac{n^2}{p^2r^2}\right)\overline{\theta_1}=0. \tag{11}$$

Розв'язком цього рівняння, обмеженого при $r=0$, буде

$$\overline{\theta_1}(r,p)=2(1-2\nu_1)\,Ap\,J_n(pr), \tag{12}$$

де $J_n(pr)$ – функція Бесселя *n*-го порядку дійсного аргументу; *A* – довільна величина, що підлягає визначенню.

Осьове переміщення $u_z^{(1)}$ визначимо з третього рівняння системи (4), яке за допомогою рівнянь (10), (12) та позначень (9), зводиться до вигляду

$$\Delta u_z^{(1)}=-2Ap^2J_n(pr)\cos n\varphi. \tag{13}$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$u_z^{(1)}(r,\varphi,p)=\overline{u}_z^{(1)}(r,p)\cos n\varphi, \tag{14}$$

де функція $\overline{u}_z^{(1)}(r,p)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2\overline{u}_z^{(1)}}{d(pr)^2}+\frac{1}{pr}\frac{d\overline{u}_z^{(1)}}{d(pr)}+\left(1-\frac{n^2}{p^2r^2}\right)\overline{u}_z^{(1)}=-2AJ_n(pr). \tag{15}$$

Загальний розв'язок цього рівняння запишеться так

$$\overline{u}_z^{(1)}(r,p)=A\left[nJ_n(pr)-prJ_{n+1}(pr)\right]+BJ_n(pr), \tag{16}$$

де *A, B* довільні величини, які будуть визначені нижче.

Далі знайдемо радіальне переміщення $u_r^{(1)}$. Для цього використаємо перше рівняння системи (4), з якого за допомогою формули для об'ємної деформації θ_1, виключимо величину $\dfrac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial\varphi}$. Тоді з врахуванням позначень (9) одержимо таке рівняння

$$\Delta u_r^{(1)}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}-\frac{u_r^{(1)}}{r^2}=-\frac{1}{1-2\nu_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial r}+\frac{2}{r}\theta_1-\frac{2}{r}pu_z^{(1)}. \tag{17}$$

Функцію $u_r^{(1)}$ подамо у вигляді

$$u_r^{(1)}(r,\varphi,p)=\overline{u}_r^{(1)}(r,p)\cos n\varphi. \tag{18}$$

Підставимо у рівняння (17) замість функції $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ і θ_1 їх вирази (10), (14) і (18). Тоді з врахуванням формул (12), (16) та позначень (9) будемо мати

$$\frac{d^2\overline{u}_r^{(1)}}{d(pr)^2}+\frac{3}{pr}\frac{d\overline{u}_r^{(1)}}{d(pr)}+\left(1-\frac{n^2-1}{p^2r^2}\right)\overline{u}_r^{(1)}=4A\left[(1-2\nu_1-n)\frac{J_n(pr)}{pr}+J_{n+1}(pr)\right]-2B\frac{J_n(pr)}{pr}. \tag{19}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\overline{u}_r^{(1)}(r,p) = -A\left\{prJ_n(pr) + 4(1-\nu_1)\left[\frac{n}{pr}J_n(pr) - J_{n+1}(pr)\right]\right\} + \\ + B\left[\frac{n}{pr}J_n(pr) - J_{n+1}(pr)\right] + Cn^2\frac{J_n(pr)}{pr}, \tag{20}$$

де A, B і C – довільні величини, що визначаються з умов на поверхні розмежування матеріалів (1)–(3).

Колове (тангенціальне) переміщення $u_\varphi^{(1)}$ визначимо з формули (4) для обчислення об'ємної деформації θ_1, звідки з врахуванням позначення (9) маємо

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial\varphi} = \theta_1 - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(1)}}{r} - pu_z^{(1)}. \tag{21}$$

Підставимо сюди замість функції θ_1, $u_r^{(1)}$ і $u_z^{(1)}$ її вирази (10), (14) і (18). Тоді після інтегрування з врахуванням співвідношень (12), (16) і (20) одержимо

$$u_\varphi^{(1)}(r,\varphi,p) = \overline{u}_\varphi^{(1)}(r,p)\, n\,\sin n\varphi\,, \tag{22}$$

де через $\overline{u}_\varphi^{(1)}(r,p)$ позначено функцію

$$\overline{u}_\varphi^{(1)}(r,p) = 4(1-\nu_1)A\frac{J_n(pr)}{pr} - B\frac{J_n(pr)}{pr} - C\left[\frac{n}{pr}J_n(pr) - J_{n+1}(pr)\right]. \tag{23}$$

Визначимо довільні величини A, B і C через значення переміщень U_*, V_* і w точок поверхні контакту. Для цього використаємо співвідношення (1) і (2). Далі відповідно до методики розв'язування задач стійкості циліндричної оболонки подамо функції u, v і w у вигляді

$$u(z,\varphi) = \overline{u}(z)\cos n\varphi, \quad v(z,\varphi) = \overline{v}(z)\sin n\varphi, \quad w(z,\varphi) = \overline{w}(z)\cos n\varphi. \tag{24}$$

Підставимо ці функції у рівності (2). У результаті одержимо

$$U_* = \overline{U}_*\cos n\varphi, \quad V_* = \overline{V}_*\cos n\varphi, \quad \overline{U}_* = \overline{u}(z) + h\frac{d\overline{w}}{dz}, \quad \overline{V}_* = \overline{v}(z) + \frac{h}{R}n\frac{d\overline{w}}{dz}. \tag{25}$$

Запишемо рівняння для визначення A, B і C. З цією метою підставимо в умови (1) замість переміщень $u_r^{(1)}$, $u_\varphi^{(1)}$ і $u_z^{(1)}$ їхні значення (14), (18) і (22). Тоді з врахуванням співвідношень (16), (20) і (23) при $r = R_1$ будемо мати

$$\begin{gathered} -A\left\{pR_1J_n(pR_1) + 4(1-\nu_1)\left[\frac{n}{pR_1}J_n(pR_1) - J_{n+1}(pR_1)\right]\right\} + \\ + B\left[\frac{n}{pR_1}J_n(pR_1) - J_{n+1}(pR_1)\right] + Cn^2\frac{J_n(pR_1)}{pR_1} = \overline{w}(z), \\ A\left[nJ_n(pR_1) - pRJ_{n+1}(pR_1)\right] + BJ_n(pR_1) = \overline{U}_*(z), \\ 4(1-\nu_1)A\frac{J_n(pR_1)}{pR_1} - B\frac{J_n(pR_1)}{pR_1} - C\left[\frac{n}{pR_1}J_n(pR_1) - J_{n+1}(pR_1)\right] = \frac{\overline{V}_*(z)}{n}. \end{gathered} \tag{26}$$

Реакцію наповнювача при його взаємодії з оболонкою визначимо з умов на поверхні розмежування матеріалів (3), в які замість напружень $\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}, \sigma_{\gamma z}^{(1)}$ *і* $\sigma_{\gamma\varphi}^{(1)}$ підставимо їхні вирази (6). Тоді, використовуючи співвідношення (5), (10)–(23), а також значення величин A, B і C, знайдених з розв'язку системи (26), одержимо

$$\sigma^*_{\gamma\gamma} = -2G_1 p D^{-1}(p)\Big\{(pR_1)^{-1} D_1(p)\overline{w}(z) + \big[D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)\big]\overline{U}_*(z) + $$
$$+ (pR_1)^{-1} D_3(p)\, n\overline{V}_*(z)\Big\}\cos n\varphi,$$
$$\sigma^*_{\gamma z} = G_1 p D^{-1}(p)\big\{\big[2D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)\big]\overline{w}_*(z) +$$
$$+\big[n^2(pR_1)^{-1} J_n(pR_1)D_4(p) - 4(1-\nu_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)D_5(p)\big]\overline{U}_*(z) + \qquad (27)$$
$$+ J_n(pR_1)D_4(p)\, n\overline{V}_*(z)\Big\}\cos n\varphi,$$
$$\sigma^*_{\gamma\varphi} = -G_1 p\, D^{-1}(p)\Big\{2n(pR_1)^{-1} D(p)\overline{w}_*(z) + n J_n(pR_1)D_4(p)\,\overline{U}_*(z) +$$
$$+ 2(pR_1)^{-1}\Big[D_1(p) + 0.5p^2R_1^2 J_n(pR_1)D_4(p)\Big]\overline{V}_*(z)\Big\}\sin n\varphi,$$

$$D(p) = pR_1 D_4(p)D_5(p) - 4(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p),$$
$$D_1(p) = D(p) + 2(1-\nu_1)pR_1 J_n^2(pR_1)D_5(p), \quad D_2(p) = n(pR_1)^{-1}J_n(pR_1) + D_5(p),$$
$$D_3(p) = D(p) + 2(1-\nu_1)J_n^3(pR_1), \quad D_4(p) = J_n^2(pR_1) + J_{n+1}^2(pR_1) - 2n(pR_1)^{-1}J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1), \qquad (28)$$
$$D_5(p) = n(pR_1)^{-1}J_n(pR_1) - J_{n+1}(pR_1).$$

Якщо оператори, що входять у співвідношення (27) і (28), розкласти в ряди за степенями pR_1 і в одержаних розкладах знехтувати членами $p^2R_1^2$ і вище порівняно з одиницею, то з врахуванням позначення (9) будемо мати найпростіший варіант умов, що описують реакцію наповнювача

$$\sigma^*_{\gamma\gamma} = \frac{2G_1}{3-4\nu_1}\left\{\big[2(1-\nu_1)n - (1-2\nu_1)\big]\frac{\overline{w}(z)}{R_1} - (1-2\nu_1)\frac{d\overline{U}_*(z)}{dz} - \right.$$
$$\left. - \big[(1-2\nu_1)n - 2(1-\nu_1)\big]\frac{\overline{V}_*(z)}{R_1}\right\}\cos n\varphi,$$
$$\sigma^*_{\gamma z} = \frac{2G_1}{3-4\nu_1}\left\{(1-2\nu_1)\frac{d\overline{w}(z)}{dz} - \frac{n}{2}(3-4\nu_1)\frac{\overline{U}_*(z)}{R_1} - \frac{1}{2}\frac{d\overline{V}_*(z)}{dz}\right\}\cos n\varphi, \qquad (29)$$
$$\sigma^*_{\gamma\varphi} = \frac{2G_1}{3-4\nu_1}\left\{\big[(1-2\nu_1)n - 2(1-\nu_1)\big]\frac{\overline{w}(z)}{R_1} - \frac{1}{2}\frac{d\overline{U}_*(z)}{dz} + \big[(1-2\nu_1) - 2(1-\nu_1)n\big]\frac{\overline{V}_*(z)}{R_1}\right\}\sin n\varphi.$$

Таким чином реакції наповнювача є відомими і виражаються через переміщення і прогин внутрішньої поверхні оболонки $\gamma = -h$, яка є одночасно поверхнею розмежування матеріалів.

Зазначимо, що із співвідношень (27) чи (29), як частковий випадок, випливають так звані умови бронювання [1], коли між оболонкою і наповнювачем знаходиться жорстко з´єднана з ним недеформована в осьовому та коловому напрямках абсолютно гнучка на згин мембрана. Для цього слід в умовах (27) чи (29) покласти $\overline{U}_* = \overline{V}_* = 0$.

Розглянемо випадок нормального контакту, коли дотичні напруження на поверхні розмежування матеріалів дорівнюють нулю. Тоді за допомогою двох останніх співвідношень (27), при $\sigma^*_{\gamma z} = 0$ і $\sigma^*_{\gamma\varphi} = 0$, виразимо величини $\overline{U}_*$, $\overline{V}_*$ через значення $\overline{w}(z)$ і підставимо їх у перше співвідношення (27). У результаті одержимо

$$\sigma^*_{\gamma\gamma} = -2G_1 p\, D^{-1}(p)\Big\{(pR_1)^{-1}\big[D_1(p) + nD_3(p)\omega^{-1}(p)\omega_1(p)\big] +$$
$$+ \big[D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)\big]\omega^{-1}(p)\omega_1(p)\Big\}\cos n\varphi, \tag{30}$$
$$\omega(p) = 2(pR_1)^{-1}\big[n^2(pR_1)^{-1}J_n(pR_1)D_4(p) - 4(1-\nu_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)D_5(p)\big]\times$$
$$\times\big[D_1(p) + 0.5p^2R_1^2J_n(pR_1)D_4(p) + 2(1-\nu_1)pR_1J_n^2(pR_1)D_5(p)\big] - n^2J_n^2(pR_1)D_4^2(p),$$
$$\omega_1(p) = -2n\Big\{(pR_1)^{-1}D_3(p)\big[n^2(pR_1)^{-1}J_n(pR_1)D_4(p) - 4(1-\nu_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)D_5(p)\big] -$$
$$- J_n(pR_1)D_4(p)\big[D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)\big]\Big\},$$
$$\omega_2(p) = -2(pR_1)^{-1}\Big\{2\big[D(p) + 2(1-\nu_1)J_n(pR_1)J_{n+1}(pR_1)D_2(p)\big]\times$$
$$\times\big[D(p) + 0.5p^2R_1^2J_n(pR_1)D_4(p) + 2(1-\nu_1)pR_1J_n^2(pR_1)D_5(p)\big] - n^2J_n(pR_1)D_3(p)D_4(p)\Big\}$$

Розкладаючи в ряди за степенями pR_1 оператори, що входять у співвідношення (30), з прийнятою вище точністю та врахуванням позначень (9) будемо мати

$$\sigma^*_{\gamma\gamma} = \frac{2G_1(n^2-1)}{\big[2(1-\nu_1)n - (1-2\nu_1)\big]R_1}\,\bar{w}(z)\cos n\varphi. \tag{31}$$

Це співвідношення є узагальненням гіпотези Вінклера, яке раніше іншим способом, стосовно задачі стійкості циліндричної оболонки з наповнювачем, було одержано в [1].

В окремому випадку, коли $n = 0$, реакція пружного наповнювача знаходиться за формулами, наведеними в [5].

Запропонований метод значно скорочує шлях розв’язування задачі стійкості циліндричної оболонки з наповнювачем, бо дає змогу звести її до розв’язування відповідної крайової задачі для області, зайнятою циліндричною оболонкою при ускладнених граничних умовах на її внутрішній поверхні. При цьому наповнювач виключається з розгляду, а його вплив на стійкість оболонки враховується реакціями (27) або (30).

1. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчет оболочек с упругим заполнителем. – М.: Наука, 1987. – 260 с. 2. Мовсисян Г.А. К устойчивости цилиндрических оболочек с заполнителем при силовых и температурных воздействиях // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – 31. – № 2. – С. 5–12. 3. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с. 4. Подстригая Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук, думка, 1978. – 344 с. 5. Воробецъ Б.С., Войтович М.І. До квазістатичної задачі термопружності для тіл з лінійними включеннями // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2002. – № 45. – С. 25–28.

УДК 539.373

І.М. Голиборода
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки

ДОСЛІДЖЕННЯ В ТЕРМІНАХ ФЕНОМЕНОЛОГІЧНОЇ СИНТЕЗНОЇ МОДЕЛІ ПОВЕРХНІ НАВАНТАЖЕННЯ ПРИ ЦИКЛІЧНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ВИПРОБУВАННЯХ ПОЛІКРИСТАЛІЧНОГО МАТЕРІАЛУ З ПАМ’ЯТТЮ ФОРМИ