

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. К., 1980. 2. Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Т. 1, Таллин, 1981.

УДК 519.6

Р.Й.Петрович

**Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра обчислювальної математики і програмування**

ПРО ЗБІЖНІСТЬ БАГАТОКРАТНИХ АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАТИВНИХ АЛГОРИТМІВ

© Р.Й. Петрович, 2000

Для запропонованих раніше агрегативно-ітеративних алгоритмів отримано новий критерій збіжності, який легко перевіряється на практиці. На основі цього критерію запропоновано простий спосіб обчислення параметрів, потрібних для побудови агрегативно-ітеративних алгоритмів.

For offered before aggregative-iterational algorithms the more effective criterion of convergence is obtained. A simple mode of deriving of iterative parameters, the conditions of convergence and estimations of error bounds are also obtained.

У [1] побудовані ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь в скінченновимірному просторі, названі багатократними агрегативно-ітеративними алгоритмами. Для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b, \quad (1)$$

де $x \in R^N$, $b \in R^N$, A – матриця розміру $N \times N$, пропонувався ітераційний алгоритм

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \quad (2)$$

$$y^{(n+1)} = (I - \Lambda + \alpha)^{-1}(-\Phi^T A_2 x^{(n)} + \alpha y^{(n)}), \quad (3)$$

де $x^{(n)} \in R^N$, $y^{(m)} \in R^m$ – ітераційні параметри, Λ , α – матриці розміру $m \times m$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, a – матриця розміру $N \times m$, Φ – матриця розміру $N \times m$ і $\Phi^T a + \alpha = \Lambda$, $A_2 = A - \Psi \Lambda \Phi^T$, Ψ – матриця розміру $N \times m$, $\Phi^T \Psi = I$, I – одинична матриця розміру $m \times m$. Для вибору початкових наближень було побудовано множину

$$\varepsilon_m = \left\{ \{x, y\} \mid x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T b \right\}. \quad (4)$$

Ітераційний процес (2),(3) у просторі R^{N+m} можна подати у вигляді

$$z^{(n+1)} = Cz^{(n)} + d, \quad (5)$$

де $z^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} b \\ \Theta_m \end{pmatrix}$, $\Theta_m \in R^m$ – вектор з нульовими компонентами,

$$C = \begin{pmatrix} A + a(I - \Lambda + \alpha)^{-1} \Phi^T A_2 & a(I - \Lambda + \alpha)^{-1} (I - \Lambda) \\ (I - \Lambda + \alpha)^{-1} \Phi^T A_2 & (I - \Lambda + \alpha)^{-1} \alpha \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Було доведено твердження про збіжність алгоритму (2), (3).

Теорема 1. Нехай матриця C має спектральне представлення

$$C = \sum_{i=1}^{N+m} \lambda_i \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_i^T \quad (7)$$

і для її власних чисел справджуються нерівності

$$|\lambda_{N+m}| \leq \dots \leq |\lambda_{m+1}| < |\lambda_m| \leq \dots \leq |\lambda_1|, \quad |\lambda_{m+1}| < 1. \quad (8)$$

Тоді, якщо початкове наближення $z^{(0)}$ належить до множини (4), то ітераційний процес (2),(3) збігається до розв'язку системи (1), причому

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq K |\lambda_{m+1}|^n \|z^{(0)} - Cz^{(0)} - d\|. \quad (9)$$

Умову збіжності алгоритму, запропонована в теоремі 1, важко перевірити, оскільки важко оцінити значення $|\lambda_{m+1}|$. Тому для важливого часткового випадку пропонується інша умова збіжності.

Теорема 2. Нехай у агрегативно-ітеративному алгоритмі (2), (3) параметри a і α вибрано

$$a = \Psi \Lambda, \quad \alpha = \Theta, \quad (10)$$

де Θ – нульова матриця розміру $m \times m$, а матриця C має спектральне представлення (7). Тоді, якщо спектральний радіус $\rho(A_3)$ матриці

$$A_3 = A_2 + \Psi \Lambda (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2 \quad (11)$$

менший від одиниці, то ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \Psi \Lambda (y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \quad (12)$$

$$y^{(n+1)} = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2 x^{(n)}, \quad (13)$$

за умови вибору початкового наближення із (4) збігається і справджується оцінка похибки (9).

Доведення. Утворимо матрицю $\tilde{\Psi}$ розміру $(N+m) \times m$, i -ий стовпець якої є власним вектором $\tilde{\psi}_i$ матриці C , що відповідає власному значенню λ_i і матрицю $\tilde{\Phi}$ розміру $(N+m) \times m$, i -ий стовпець якої є лівим власним вектором $\tilde{\varphi}_i$ матриці C , що відповідає власному значенню λ_i , $i=1, \dots, m$. Матрицю C можна подати у вигляді $C = C_1 + C_2$, де $C_1 = \tilde{\Psi} \Lambda \tilde{\Phi}^T$. Спектр матриці C_1 складається з чисел $\lambda_m, \dots, \lambda_1$, а спектр матриці C_2 складається з чисел $\lambda_{N+m}, \dots, \lambda_{m+1}$ та числа нуль. Подамо матрицю C у вигляді

$$C = C_3 + C_4 = \begin{pmatrix} A_2 + \Psi \Lambda (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2 & \Theta_1 \\ -(I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2 & \Theta_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & \Psi \Lambda \\ \Theta_1 & \Theta_m \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де Θ_1 – нульова матриця розміру $N \times m$. Покажемо, що спектр матриці C_3 збігається із спектром матриці C_2 . Подамо матрицю C_4 у вигляді

$$C_4 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i \tilde{\varphi}_i^T, \text{ де } \xi_i \in W, \xi_i = \begin{pmatrix} \psi_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подіємо матрицею C_3 на власні вектори матриці C $\tilde{\psi}_i$, $i=N+m, \dots, m+1$. Отримуємо $C_3 \tilde{\psi}_i = C \tilde{\psi}_i - C_4 \tilde{\psi}_i = C \tilde{\psi}_i = \lambda_i \tilde{\psi}_i$. Власні значення λ_i та ліві власні вектори $\tilde{\varphi}_i$, $i=1, \dots, m$ матриці C є власними значеннями та власними векторами матриці C^* . Отже, λ_i та $\tilde{\varphi}_i$, $i=1, \dots, m$ є власними значеннями та власними векторами матриці C_4^* . Тобто, отримуємо, що

$$C^* \tilde{\varphi}_i - C_4 \tilde{\varphi}_i = 0 \tilde{\varphi}_i, i=1, \dots, m.$$

Отже, ми показали, що спектри матриць C_2 і C_3 збігаються. Крім того, блок $-(I - \Lambda)^{-1} \Phi^T A_2$ матриці C_3 є лінійною комбінацією рядків матриці A_2 . Тому власними значеннями матриці A_3 є $\lambda_{N+m}, \dots, \lambda_{m+1}$. Отже, якщо спектральний радіус матриці A_3 менший від одиниці, то виконується умова теореми 1 $|\lambda_{m+1}| < 1$. Значить, ітераційний процес (12), (13) за умови вибору початкового наближення із (4) збігається і справджується оцінка (9). Теорему доведено.

Теорема 2 дає можливість оцінити значення модуля власного значення матриці C $|\lambda_{m+1}|$, оскільки $|\lambda_{m+1}|$ є спектральним радіусом матриці A_3 і його можна оцінити через $\|A_3\|$. Вибір ітераційних параметрів (10) є дуже важливим частковим випадком ітераційного процесу (2), (3). Саме він використаний для побудови агрегативно-ітеративних аналогів деяких ітераційних методів [2].

Розглянемо вибір чисел λ_i та векторів ψ_i і φ_i . Вважаємо що для власних значень μ_i матриці A , впорядкованих так, що $|\mu_{N+m}| \leq \dots \leq |\mu_{m+1}| < |\mu_m| \leq \dots \leq |\mu_1|$ справджується нерівність $|\mu_{m+1}| < 1$. Якщо за параметри λ_i вибрати власні значення матриці A μ_i , $i=1, \dots, m$, а за вектори ψ_i і φ_i відповідні праві і ліві власні вектори матриці A , то згідно з твердженням теореми 2 алгоритм (12), (13) збігається. Тому за λ_i та вектори ψ_i і φ_i можна вибрати наближення до μ_i та відповідних їм власних правих та лівих векторів матриці A . Такі наближення можна отримати одним із відомих способів, наприклад, степеневим методом. Якщо вибрані ітераційні параметри λ_i та вектори ψ_i і φ_i задовольнятимуть вимогам теореми 2, то ітераційний процес (12), (13) за умови вибору початкового наближення із (4) буде збігатися і справджуватиметься оцінка (9).

Розглянемо інший спосіб отримання згаданих ітераційних параметрів. Пояснимо суть на прикладі одержання λ_i , ψ_i та φ_i для однопараметричного варіанта методу (12), (13). У цьому випадку $m=1$ і потрібно знайти параметри λ , ψ , φ . Евклідова норма матриці

визначається $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$. Шукатимемо ψ та φ так, щоб матриця $D = A - \psi \varphi^T$

мала найменшу евклідову норму. Візьмемо часткові похідні за компонентами ψ_i та φ_i

векторів ψ та φ від $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2}$ та прирівняємо їх до нуля. Отримаємо формули

$$\varphi = \frac{A^T \psi}{(\psi, \psi)} \text{ та } \psi = \frac{A \varphi}{(\varphi, \varphi)}. \text{ Сформулюємо алгоритм так:}$$

1. Виберемо за початкове наближення до вектора ψ вектор $\psi^{(0)}$, компоненти якого $\psi_i^{(0)}$ є сумою елементів i -го рядка матриці A .
2. Наближення до вектора φ одержуємо за формулою

$$\varphi^{(n)} = \frac{A^T \psi^{(n)}}{(\psi^{(n)}, \psi^{(n)})} \quad n=0, 1, \dots \quad (16)$$

3. Наближення до вектора ψ отримуємо за формулою

$$\psi^{(n+1)} = \frac{A \varphi^{(n)}}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})} \quad n=0, 1, \dots \quad (17)$$

4. Число λ одержуємо за формулою

$$\lambda = (\varphi^{(n)}, \psi^{(n+1)}), \quad (18)$$

після чого за вектори φ і ψ приймаємо вектори $\varphi^{(n)}$ та $\psi^{(n+1)}$, пронормовані так, що $(\varphi^{(n)}, \psi^{(n+1)}) = 1$.

Цей спосіб можна також застосувати для знаходження кількох ітераційних параметрів λ_i та відповідних їм пар ψ_i та φ_i . Для цього потрібно, скориставшись пунктами 1-4, отримати λ_1 , ψ_1 та φ_1 . Потім утворити матрицю $A_2 = A - \lambda \psi_1 \varphi_1^T$ і застосувати до неї пункти 1-4. Одержані вектори ψ_2 та φ_2 потрібно буде ортогоналізувати до вже знайдених ψ_1 та φ_1 , щоб разом вони утворювали біортогональну систему. Можливий також інший спосіб одержання ітераційних параметрів λ_i , ψ_i та φ_i , який природно виникає із наведених міркувань. Він одержується із мінімізації евклідової норми матриці

$$A - \sum_{i=1}^m \psi_i \varphi_i^T :$$

1. Користуючись наведеним вище способом, шукаємо $\lambda_1^{(0)}$, $\psi_1^{(0)}$, $\varphi_1^{(0)}$.
2. Використавши цей же спосіб до матриці $A - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^{(0)} \psi_j^{(0)} \varphi_j^T$, отримуємо наближення до

$$\lambda_i^{(0)}, \psi_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)}, \quad i=2, \dots, m.$$

3. Подальші наближення шукаємо за формулами

$$\varphi_i^{(n+1)} = \frac{A^T \psi_i^{(n)} - \sum_{j \neq i} (\psi_i^{(n)}, \psi_j^{(n)}) \varphi_j^{(n)}}{(\psi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)})} \quad (19)$$

$$\psi_i^{(n+1)} = \frac{A\varphi_i^{(n)} - \sum_{j \neq i} (\varphi_i^{(n)}, \varphi_j^{(n)}) \psi_j^{(n)}}{(\varphi_i^{(n)}, \varphi_i^{(n)})} \quad i=1, \dots, m \quad (20)$$

4. Числа λ_i отримуються із співвідношень

$$\lambda_i = (\psi_i^{(n+1)}, \varphi_i^{(n+1)}). \quad (21)$$

5. Вектори ψ_i та φ_i $i=1, \dots, m$ отримуємо біортогоналізацією та нормуванням векторів

$\psi_i^{(n+1)}$ та $\varphi_i^{(n+1)}$, так щоб для них справджувались співвідношення $(\psi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

Цей спосіб краще застосовувати, коли матриця A має близькі за модулем власні значення.

Наведений спосіб одержання ітераційних параметрів можна легко модифікувати для одержання ітераційних параметрів i у випадку, коли деякі з параметрів λ_i і λ_{i+1} є комплексно-спряженими, що відповідає випадку, коли власні значення матриці A μ_i і μ_{i+1} є комплексно-спряженими.

1. Петрович Р.Й. Багатократний агрегативно-ітеративний алгоритм для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісник Державного університету "Львівська політехніка", 1996. N 299, с.183-185. 2. Петрович Р.Й. Агрегативно-ітеративний аналог методу послідовної верхньої релаксації // Вісник Державного університету "Львівська політехніка", Львів, 1999. N 364, с.219-222. 3. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования. Львов. политехн. ин-т. Львов, 1992. 21 с. Деп в УкрНИИНТИ 15.01.92, N43 Ук92.

УДК 512.8

Д.М. Білонога

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

УМОВИ ЗВЕДЕННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ОДНОГО КЛАСУ ДО ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ

© Д.М. Білонога, 2000

У статті в термінах (Δ, C) –перетворень знайдені необхідні і достатні умови зведення регулярної поліноміальної матриці з одним відмінним від одиниці інваріантним множником до блочно-трикутного, а також до трикутного вигляду.

A necessary and sufficient conditions in terms of (Δ, C) - conversions so that regular polynomial matrix with one different from unit invariant multiplier can be turning by transformations of similarity to block-triangular and to triangular view are found in this paper.