5. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, № 12, с. 14-21. 6. Мельник О.М. Об инвариантах преобразующих матриц // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов // Сб. науч. тр. АН УССР. Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. - Киев, Наукова думка, 1989, с. 160-164.

УДК 517.28

О.С.Гаврилів
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРАТНИХ АБСТРАКТНИХ ВІНЕРІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ

У цій роботі розглянутий розвиток теорії інтегрування в багатомасштабних нескінченно–вимірних многовидах в абстрактних вінерівських просторах. Наведені нелінійні перетворення кратних абстрактних вінерівських інтегралів.

The purpose of this paper is to develop an integration theory over a suitable kind of infinite–dimensional manifold under the name of an abstract Wiener spaces. It is demonstrated the nonlinear transformations of multiple abstract Wiener integrals.

Має місце

Лема 1. Нехай T – диференційовне відображення вигляду $T = I + K$, діюче в R^n, де I – тотожний оператор, $\dim K\left(R^n\right) = m$, $m < n$; K – сюр'єктивне; існує $K^{-1} : R^m \to R^n$, $\left\|K'\right\| < 1$. Тоді $\dim K^{-1}\left(R^m\right) = m$.

Тут K' – похідна Фреше.

Доведення. Якщо u – лінійне неперервне обертовне відображення банахового простору E в банахів простір F, v – лінійне неперервне відображення E в F, що задовольняє нерівність

$$\|v\| < \left\|u^{-1}\right\|^{-1},$$

то лінійне неперервне відображення $(u + v)$ простору E в простір F також є обертовним [1, ст.140]. Отже, для T – неперервно диференційовного відображення деякої відкритої множини $U < E$ в F, де E і F – скінченновимірні, обертовність $T'(a)$, $a \in U$ [1, ст.311] означає, що E і F є однієї розмірності і якобіан T в т. a у вибраній системі координат відмінний від нуля, – одержимо $\dim K^{-1}\left(R^m\right) = m$ і якобіан $T = (I + K) : R^m \to R^m$ відмінний від нуля. Лему доведено.

Використовуємо попередні позначення.

Нехай $T = I + K$ – нелінійне відображення $B_{(l)}$ в себе,

$K_{j.}\left(x_{1.}, x_{2.}, \ldots, x_{l.}\right) \in H_j$, $\dfrac{\delta K_{m.}}{\delta x_{j.}}$ – часткова похідна Фреше,

$$det\,T = det(I+K) = \prod_s (1+\lambda_s),$$

де λ_s – власні числа оператора K'.

$$Kx = \begin{bmatrix} K_{1.}(x_{1.}, x_{2.}, x_{l.}) \\ K_{2.}(x_{1.}, x_{2.}, x_{l.}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ K_{l.}(x_{1.}, x_{2.}, x_{l.}) \end{bmatrix}, \qquad K' = \begin{bmatrix} \frac{\delta K_{1.}}{\delta x_{1.}} & \frac{\delta K_{1.}}{\delta x_{2.}} & \dots & \frac{\delta K_{1.}}{\delta x_{l.}} \\ \frac{\delta K_{2.}}{\delta x_{1.}} & \frac{\delta K_{2.}}{\delta x_{2.}} & \dots & \frac{\delta K_{2.}}{\delta x_{l.}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta K_{l.}}{\delta x_{1.}} & \frac{\delta K_{l.}}{\delta x_{2.}} & \dots & \frac{\delta K_{l.}}{\delta x_{l.}} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Теорема 1. Припустимо, що для T виконуються умови
(а) $K(B_{(l)}) \subset H_{(l)}$;
(в) Для K в $H_{(l)}$ існує обернене відображення K^{-1};
(с) Існує $K' \in L_1(H_{(l)})$

Тоді міри $p_{\bar{t}} \circ T$ і $p_{\bar{t}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{t}}$ інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі

$$\begin{aligned} &\int_{B_{(l)}} f(y) p_{\bar{t}}(dy) = \int_{B_{(l)}} f(Tx) \times \\ &\times exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} t_t^{-1} \left[2\left(K_{j.}(x_{1.}, x_{2.}, \dots, x_{l.}), x_{j.}\right) + \left|\left(K_{j.}(x_{1.}, x_{2.}, \dots, x_{l.}), x_{j.}\right)\right|^2 \right] \right\} \times \\ &\times |det\,T|\, p_{\bar{t}}(dx). \end{aligned} \tag{2}$$

Доведення. Звуження на $H_{(l)}$ операторів, заданих в $B_{(l)}$, позначатимемо тими ж буквами латинського алфавіту.

Розглянемо спочатку випадок обмеженої неперервної комплекснозначної функції $f(y)$ на $B_{(l)}$. Нехай g – звуження на f на $H_{(l)}$, $g = f \circ i_{(l)}$, D – частково впорядкована множина скінченновимірних ортогональних проекторів Q в $H_{(l)}$. Тоді, згідно з [2, ст.80, 81], напрямленість $(g \circ Q)^{\sim}$ випадкових величин збігається за ймовірністю до випадкової величини $\tilde{g}$, коли $Q \to I$ сильно по напрямленій множині D, $\tilde{g} = f$ майже скрізь відносно міри $p_{\bar{t}}$. Отже, ми можемо вибрати таку послідовність проекторів $\{Q_{\bar{n}}\} \subset D$, сильно збіжну до тотожного відображення в $H_{(l)}$, що $\tilde{g}(Q_{\bar{n}}.)$ збігається до f майже скрізь відносно $p_{\bar{t}}$. Тоді

$$\begin{aligned} &\int_{B_{(l)}} f(y) p_{\bar{t}}(dy) = \lim_{\bar{n}\to\infty} \int_{B_{(l)}} \tilde{g}(Q_{\bar{n}} x)(i_{(l)} y)\, p_{\bar{t}}(dy) = \\ &= \lim_{\bar{n}\to\infty} \int_{H_{(l)}} g(Q_{\bar{n}} y) \mu_{\bar{t}}(dy) = \lim_{\bar{n}\to\infty} \int_{Q_{\bar{n}} H_{(l)}} g_0(Q_{\bar{n}} y) dQ_{n_1} y_{1.} \dots dQ_{n_l} y_{l.}, \end{aligned} \tag{3}$$

де $g_0(Q_{\vec{n}}y) = g(Q_{\vec{n}}y)\prod_{j=1}^{l}(2\pi t_j)^{-\frac{n}{2}j} exp\left[-(2t_j)^{-1}\left|Q_{n_j}y_{j.}\right|_j^2\right]$, $Q_{\vec{n}}H_{(l)} = \underset{j=1}{\overset{l}{X}} Q_{n_j}H_j$, Q_{n_j} – ортопроектор в H_j, $n_j = dim\, Q_{n_j}H_j$; $j = \overline{1,l}$.

Застосовуючи перетворення T до останнього виразу в (2), який стосується скінченновимірних просторів, – отримаємо

$$\int_{B_{(l)}} f(y)p_{\bar{t}}(dy) = \lim_{\vec{n}\to\infty} \int_{Q_{\vec{n}}H_{(l)}} g_0(Q_{\vec{n}}Tx)dQ_{n_1}(Tx)_{1.}...dQ_{n_l}(Tx)_{l.} \tag{4}$$

Оскільки $Q_{\vec{n}}TH_{(l)} \subset H_{(l)}$, позначаючи $P_{\vec{n}}H_{(l)} = T^{-1}Q_{\vec{n}}TH_{(l)}$, на підставі леми 1 (виконання умови $\|K' \circ P_{\vec{n}}\| < 1$ буде показано нижче), одержимо

$$dim\, P_{\vec{n}}H_{(l)} = dim\, Q_{\vec{n}}TH_{(l)}.$$

Звідси, з причин ізоморфності просторів $Q_{\vec{n}}H_{(l)}$ і R^l, $P_{\vec{n}}H_{(l)}$ і R^l, формули перетворення кратного інтеграла в R^l від функції з векторними значеннями [1, ст. 742], неперервної і з компактним носієм, враховуючи, що похідна Фреше лінійного оператора є сам цей оператор, після нескладних перетворень маємо

$$\int_{G_{\vec{n}}H_{(l)}} g(Q_{\vec{n}}y)\mu_{\bar{t}}(dQ_{\vec{n}}y) =$$
$$= \int_{G_{\vec{n}}H_{(l)}} g(TP_{\vec{n}}x)exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}(2t_j)^{-1}\left[2\left\langle P_{n_j}x_{j.},(KP_{\vec{n}}x)_{j.}\right\rangle_j + \left|(KP_{\vec{n}}x)_{j.}\right|_j^2\right]\right\}\times$$
$$\times\left|det\, T \circ G_{\vec{n}}\right|\mu_{\bar{t}}(dG_{\vec{n}}x),$$

де $G_{\vec{n}}H_{(l)} = P_{\vec{n}}H_{(l)} \cap Q_{\vec{n}}(H_{(l)})$ (припускаючи, природно, що $G_{\vec{n}}H_{(l)} \neq \emptyset$), $det\, T \circ G_{\vec{n}} = = \prod_s (1+\lambda_s)$, λ_s – власні числа оператора $K' \circ G_{\vec{n}}$.

Для інтегровності за Лебегом функцій з векторними значеннями [1, ст. 532] необхідно і достатньо існування апроксимуючої послідовності для цієї функції, утвореної із неперервних функцій з комплексним носієм, що забезпечує [1, ст. 526] сильну її вимірність і $\mu_{\bar{t}}$ інтегровність норми.

Нескладно показати, що із сильного прямування $Q_{\vec{n}} \to I$ в $H_{(l)}$ при $\vec{n} \to \infty$ випливає $P_{\vec{n}} \to I$, і

$$\int_{B_{(l)}} \tilde{g}(G_{\vec{n}}z)(i_{(l)}y)p_{\bar{t}}(dy) =$$

$$= \int_{B_{(l)}} \tilde{g}(TG_{\vec{n}}z)exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}(2t_j)^{-1}\left[2\left\langle G_{n_j}z_{j.},(KG_{\vec{n}}z)_{j.}\right\rangle_j + \left|(KG_{\vec{n}}z)_{j.}\right|_j^2\right]\right\}^{\sim}\times \tag{5}$$
$$\times(i_{(l)}x)\left|det\, T \circ G_{\vec{n}}\right|p_{\bar{t}}(dx).$$

Збіжність $det\, T \circ G_{\vec{n}}$ при $\vec{n} \to \infty$ забезпечується ядерністю лінійного оператора K' в $H_{(l)}$ [3, ст. 199], що зумовлює $\|K' \circ G_{\vec{n}}\| < 1$. В силу неперервності і обмеженості підінтегрального виразу в правій частині (5), спрямовуючи $Q_{\vec{n}} \to I$ сильно, отримаєм, що

$$\begin{aligned}&\tilde{g}(T \circ G_{\vec{n}}.)exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}(2t_j)^{-1}\left[2\left\langle G_{n_j}.,(KG_{\vec{n}}.)_{j.}\right\rangle_j + \left|(KG_{\vec{n}}.)_{j.}\right|_j^2\right]\right\}^{\sim} \cdot |det\, T \circ G_{\vec{n}}| \to \\ &\to f(T.)exp\left\{-\sum_{j=1}^{l}(2t_j)^{-1}\left[2\left((\,.\,)_{j.},(K.)_{j.}\right)_j + \left|(K.)_{j.}\right|_j^2\right]\right\} \cdot |det\, T|\end{aligned} \tag{6}$$

за ймовірністю. Звідси, за необхідністю, перейдемо до такої послідовності $\{G_{\vec{n}}\}$, що розглянута збіжність в $B_{(l)}$ буде збіжністю майже скрізь відносно $p_{\vec{t}}$. Оскільки для $p_{\vec{t}}$ – інтегровності функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі необхідно і достатньо [4, ст. 94] сильної вимірності функції $f(y)$ і $p_{\vec{t}}$ – інтегровності її норми, то теорему доведено.

Розглянемо інтеграл Бохнера $\int\limits_{B_\infty} f(y)p_{\vec{t}}(dy)$ від обмеженої функції $f(y)$, $y \in B_\infty$ зі значеннями в банаховому просторі за абстрактною вінерівською мірою $p_{\vec{t}}$, відповідною гауссівською циліндричною мірою $\mu_{\vec{t}}$ в H_∞,

$$\mu_{\vec{t}}(H_\infty) = \prod_{j=1}^{\infty} t_j^{-\frac{n_j}{2}} \int\limits_{F_j} exp\left\{-\frac{n_j}{2} ln\, 2\pi - \frac{|x_{j\cdot}|_j^2}{2t_j}\right\} dx_{j\cdot}$$

з параметром $\vec{t} = \{t_1, ..., t_l, ...\}$.

Хай $T = I + K$ – нелінійне відображення B_∞ в себе,

$$Kx = \begin{bmatrix} K_{1\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, ..., x_{l\cdot}, ...) \\ K_{2\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, ..., x_{l\cdot}, ...) \\ .... \\ K_{l\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, ..., x_{l\cdot}, ...) \\ .... \end{bmatrix},\quad K' = \begin{bmatrix} \frac{\delta K_{1\cdot}}{\delta x_{1\cdot}} & \frac{\delta K_{1\cdot}}{\delta x_{2\cdot}} & ... & \frac{\delta K_{1\cdot}}{\delta x_{l\cdot}} & ... \\ \frac{\delta K_{2\cdot}}{\delta x_{1\cdot}} & \frac{\delta K_{2\cdot}}{\delta x_{2\cdot}} & ... & \frac{\delta K_{2\cdot}}{\delta x_{l\cdot}} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\delta K_{l\cdot}}{\delta x_{1\cdot}} & \frac{\delta K_{l\cdot}}{\delta x_{2\cdot}} & ... & \frac{\delta K_{l\cdot}}{\delta x_{l\cdot}} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix},$$

де $K_{j\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot}, ..., x_{l\cdot}, ..) \in H_j$ гільбертовому, $\dfrac{\delta\, K_{m\cdot}}{\delta\, x_{j\cdot}}$ – часткова похідна Фреше, $det\, T =$ $= det(I + K) = \prod\limits_s (1 + \lambda_s)$, λ_s – власні числа оператора K'.

Теорема 2. Нехай для T виконуються такі умови:

(а) $K(B_\infty) \subset H_\infty$;

(в) Для K в H_∞ існує обернене відображення;

(с) $K' \in L_1(H_\infty)$.

Тоді міри $p_{\bar{t}} \circ T$ і $p_{\bar{t}}$ є еквівалентними, і для довільної обмеженої $p_{\bar{t}}$ інтегровної в сенсі Бохнера функції $f(y)$ зі значеннями в банаховому просторі виконується рівність

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\bar{t}}(dy) =$$

$$= \int_{B_\infty} f(Tx) exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1}\left[2\left(K_{n\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot},..., x_{l\cdot},...), x_{n\cdot}\right)_n + \left|K_{n\cdot}(x_{1\cdot}, x_{2\cdot},..., x_{l\cdot},...)\right|_n^2\right]\right\} \times$$

$$\times \left|det\, T\right| p_{\bar{t}}(dx).$$

Тут $(\ \cdot, \cdot\ )_n$ – канонічна білінійна форма, що призводить B_n і B_n^* до двоїстості.

Доведення. Як і в скінченновимірному випадку, розглянемо випадок обмеженої неперервної комплекснозначної функції $f(y)$ на B_∞. Нехай g – звуження f на H_∞, $g = f \circ i$, D – частково впорядкована множина скінченновимірних ортогональних проекторів Q в H_∞. Тоді, напрямленість $(g \circ Q)^{\sim}$ випадкових величин збігається за ймовірністю до випадкової величини $\tilde{g}$, коли $Q \to I$ сильно по напрямленій множині D, $\tilde{g} = f$ майже скрізь стосовно міри $p_{\bar{t}}$. Отже, можемо вибрати таку послідовність проекторів $\{Q_l\} \subset D$ сильно збіжну до тотожнього відображення в H_∞, що $\tilde{g}(Q_l\ \cdot)$ збігається до f майже скрізь відносно $p_{\bar{t}}$. Тоді

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\bar{t}}(dy) = \int_{B_\infty} \tilde{g}(iy) p_{\bar{t}}(dy) = \lim_{l\to\infty} \int_{B_\infty} \tilde{g}(Q_l x)(iy) p_{\bar{t}}(dy) = \lim_{l\to\infty} \int_{H_\infty} g(Q_l y) \mu_{\bar{t}}(dy) =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{Q_l H_\infty} g(Q_l y) \mu_{\bar{t}}(dQ_l y) = \lim_{l\to\infty} \int_{H_{(l)}} g_0\left(i_{(l)} z\right) \mu_{\bar{t}}\left(di_{(l)} z\right) = \lim_{l\to\infty} \int_{B_{(l)}} \tilde{g}_0\left(i_{(l)} z\right) p_{\bar{t}}(dz),$$

підставою ізоморфізму між $Q_l H_\infty$ і $H_{(l)}$. Тут $iy \in H_\infty$, $z \in B_{(l)}$, $Q_l y = \{y_{1\cdot}, y_{2\cdot},..., y_{l\cdot}, 0,...\}$, $y_{j\cdot} = \left(i_{(l)} z\right)_{j\cdot}$, $j = \overline{1,l}$; $g_0\left(i_{(l)} z\right) = g(Q_l y)$.

В силу узгодженості норм, використовуваних для будови $B_{(l)}$ і B_∞ і мір в $B_{(l)}$, B_∞ (узгодженість реалізуємо абсолютно), позначаючи

$$f_0(u_{1\cdot}, u_{2\cdot},..., u_{l\cdot}) = f(u_{1\cdot}, u_{2\cdot},..., u_{l\cdot}, 0,...) \quad \forall u \in B_\infty,$$

маємо

$$\int_{B_\infty} f(y) p_{\bar{t}}(dy) = \lim_{l\to\infty} \int_{B_{(l)}} f_0(z) p_{\bar{t}}(dz),$$

$f_0 = \tilde{g}_0$ майже скрізь відносно звуження міри $p_{\bar{t}}$ на $B_{(l)}$.

Використаємо формули перетворення скінченнократного абстрактного вінерівського інтеграла за нелінійного перетворення простору $B_{(l)}$

Хай

$$y = Tx, \quad x = \{x_{1\cdot}, x_{2\cdot},..., x_{l\cdot},...\}, \quad x_1 = \{x_{1\cdot}, x_{2\cdot},..., x_{l\cdot}\}, \quad z = \{y_{1\cdot}, y_{2\cdot},..., y_{l\cdot}\}.$$

Тоді $z = Tx_1$ (оператори в $B_{(l)}$, ізоморфні операторам в $B_{(l)} \times \{0\} \times ...$ позначаємо однаковими позначеннями) і

$$\int_{B_\infty} f(y)p_{\bar t}(dy) = \lim_{l\to\infty}\int_{H_\infty} g(T\circ Q_l ix)exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l} t_n^{-1}\left[2\left\langle K_{n\cdot}(Q_l ix),(Q_l ix)_{n\cdot}\right\rangle_n +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|K_{n\cdot}(Q_l ix)\right|_n^2\right]\right\}\left|det\,T\circ Q_l\right|\mu_{\bar t}(dix) = \lim_{l\to\infty}\int_{B_\infty}\tilde g_*(T\circ Q_l ix)p_{\bar t}(dx),$$

де

$$\tilde g_*(T\circ Q_l i\,\cdot) = \tilde g(T\circ Q_l i\,\cdot)exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l} t_n^{-1}\left[2\left\langle K_{n\cdot}(Q_l i\,\cdot),(Q_l i\,\cdot)_{n\cdot}\right\rangle_n +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|K_{n\cdot}(Q_l i\,\cdot)\right|_n^2\right]^{\sim}\right\}\left|det\,T\circ Q_l\right|.$$

Оскільки $\{Q_l\}\to T$ в H_∞ сильно, $\tilde g_*(T\circ Q_l ix)$ є неперервною на B_∞ і обмеженою, очевидно

$$\tilde g_*(T\circ Q_l i\,\cdot)\to f(T\,\cdot)exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{-1}\left[2\left(K_{n\cdot}(\,\cdot\,),(\,\cdot\,)_{n\cdot}\right)_n + \left|K_{n\cdot}(\,\cdot\,)\right|_n^2\right]^{\sim}\right\}\left|det\,T\right|$$

за ймовірністю.

Аналогічно теоремі 1 одержуємо твердження теореми.

1. Шварц Л. Анализ. В 2–х т. Т. 1. М., 1972. 2. Го Х.–С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М., 1979. 3. Функциональный анализ (Под редакцией С.Г.Крейна). М., Наука, 1972. 544 с. 4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962. 5. Козак П.П., Чабанюк Я.М. Интеграл по винеровской мере в бесконечном произведении пространств непрерывных функций многих переменных // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 9.– С. 67–70. 6. Ковальчик І.М. Про інтеграл Вінера в просторі неперервних функцій двох змінних // Доп. АН УРСР. 1967. № 9. С. 782–786. 7. Ковальчик І.М. Про кратний континуальний інтеграл у просторі неперервних функцій двох змінних // Доп. АН УРСР. 1972. № 7. С. 604–608. 8. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М., 1983. 9. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К., 1988. 10. Билущак Г.И., Козак П.П. Винеровская мера в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 8. С. 5–8. 11. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М., 1985.