Для аналітичних на $R_+^1 \times R^q$ функцій $f_k(t,x)$, які для фіксованого $t>0$ належать до класу A_Θ, визначимо оператори $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ через відповідні ряди Тейлора формальною заміною t на $\frac{\partial}{\partial\xi}$, x на $\frac{\partial}{\partial\alpha}$. Дії диференціальних виразів безмежного порядку $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на функції, які містяться в фігурних дужках формули (11), будуть визначені коректно, якщо для кожного фіксованого $t>0$ $f_k(t,x)\in A_\Theta, k=\overline{1,n}$ [5]. Результат дії $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на ці функції для фіксованого $t>0$ належить теж до A_Θ [5].

Розв'язок задачі (1),(2) вигляду (11) допускає скінченне диференціювання за змінною t та за змінною x. Дії операторів $f_k\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ на відповідні продиференційовані за змінною t та за змінною x вирази при цьому визначені коректно, оскільки функції $v_{skm}(t,\alpha)$ після диференціювання за t є знову цілими відносно $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_q$ функціями того ж порядку Θ за сукупністю змінних.

Отже, клас вектор-функцій, компоненти яких для кожного фіксованого $t>0$ належать до A_Θ, є класом існування розв'язку задачі (1),(2). Цей клас вектор-функцій є одночасно й класом єдиності розв'язку задачі (1),(2), оскільки він міститься у відомому класі єдиності,виділеному Г.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим [4].

1.Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993. 2. Каленюк П. І. , Нитребич З. М. , Воробець М.Б. Задача Коші для системи диференціальних рівнянь із частинними похідними // Вісник ДУ "Львівська політехніка". 1998. №337. С.110-112. 3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980. 4.Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958. 5. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. М., 1981.

УДК 517.948

Р.Р.Столярчук
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра обчислювальної математики та програмування

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ ЧАПЛИГІНСЬКОГО ТИПУ ДО РІВНЯНЬ З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

З відомих переваг методу Чаплигіна перед іншими методами не завжди можна скористатися не лише через немонотонність та неопуклість відповідних операторів та через потребу практичного знаходження обернених до тих чи інших

операторів, але й через недиференційовність цих операторів.

У пропонованій роботі досліджуємо один двосторонній ітераційний алгоритм чаплигінського типу для рівняння неявного вигляду. Конструція цього алгоритму та його обгрунтування вимагають диференційовності та монотонності висхідних операторів, зберігаючи властивість двосторонності алгоритму та його надлінійну збіжність.

Using of two-sided Chaplygin's type method for differential equations with nondifferential operators was considered. The conditions of convergence were investigated.

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(Lx,x)=0\,, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$Sx=x(t_0)\,, \tag{2}$$

де $L{:}E_0 \to E;\, S{:}E_0 \to E, F(p,x){:}E\times E_0 \to E$, E_0 – опукла множина елементів з напіввпоряд–кованого банахового простору; S -лінійний неперервний оператор, лінійний оператор L має обмежений неперервний додатний обернений оператор L^{-1}. Вимагаємо неперервності оператора $F(p,x)$ в E .

Нехай справджуються умови :

А) задаємо лінійні неперервні щодо ω , неперервні за y,z,p,q оператори $H(p,q)\omega, G_1(y,z)\omega; \alpha_1(y,z)\omega$, для яких при $y\le z, p\le q,\ p,q\in E,\ y,z\in E_0$ справджуються нерівності

$$-H(p,q)(q-p)\le F(q,y)-F(p,y)\,, \tag{3}$$

$$(G_1(y,z)+\alpha_1(y,z))(z-y)\le F(p,z)-F(p,y)\,. \tag{4}$$

Б) $H(p,q)\omega$ не спадає щодо p і не зростає щодо $q, G_1(y,z)\omega$ та $\alpha_1(y,z)\omega$ – не спадають щодо y і не зростають щодо z, а оператор $\alpha_1(y,z)\omega$ є додатним як лінійний оператор щодо ω .

В) Якщо $S\omega=\theta,$ де θ - нульовий елемент в E, $Sy=Sz=x(t_0)\ (y,z\in D,\omega\in E)$, то кожна з нерівностей

$$\begin{aligned}&-H(Ly,y)L\omega+G_1(y,z)\omega\ge\theta,\\&-H(Ly,y)L\omega+(G_1(y,z)+\alpha_1(y,z))\omega\ge\theta\end{aligned} \tag{5}$$

призводить до нерівності $\omega\ge\theta$.

Будемо досліджувати ітераційний процес

$$\begin{cases}-H(Ly_n,y_n)L(y_{n+1}-y_n)+G_1(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n)+F(Ly_n y_n)=0,\\-H(Ly_n,y_n)L(z_{n+1}-z_n)+G_1(y_n,z_n)+\alpha_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n)+F(Lz_n,z_n)=0,\end{cases} \tag{6}$$

де

$$y_0=u, z_0=\upsilon,\quad u,\upsilon\in E\,. \tag{7}$$

Припускаємо,що система (6) має єдиний розв'язок (y_{n+1},z_{n+1}) .для всякого $\mathrm{n}=0,1..$

За таких припущень доведемо теореми.

Теорема 1. Нехай виконуються умови А)-В) і крім того нехай для y_0,y_1,z_0,z_1, які задовольняють (6),(7) при $n=0$, справджуються співвідношення

$$y_0\le y_1\le z_1\le z_0\,. \tag{8}$$

Тоді будуть справедливими оцінки $y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n$. (9)

Доведення.З (5) отримуємо

$$-H(Ly,y)L\omega \ge -G_1(y,z)\omega,$$
$$-H(Ly_0,y_0)L(y_1-y_0) \ge G_1(y_0,z_0)(y_1-y_0).$$

При $n=0$ та $n=1$ з (6) отримаємо

$$-H(Ly_0,y_0)L(y_1-y_0)+G_1(y_0,z_0)(y_1-y_0)+F(Ly_0,y_0)=0,$$
$$-H(Ly_1,y_1)L(y_2-y_1)+G_1(y_1,z_1)(y_2-y_1)+F(Ly_1,y_1)=0.$$

Віднявши від другого рівняння перше і використавши (3) та (5), одержимо

$$-H(Ly_1,y_1)L(y_2-y_1)+G_1(y_1,z_1)(y_2-y_1)+F(Ly_1,y_1)+H(Ly_0,y_0)L(y_1-y_0)-$$
$$-G_1(y_0,z_0)(y_1-y_0)-F(Ly_0,y_0) \ge -H(y_0,Ly_0)L(y_1-y_0)+(G_1(y_0,y_1)+\alpha_1(y_0,y_1)(y_1-y_0) \ge \theta$$

Отже, за умови В) $y_2-y_1 \ge \theta$, а звідки $y_2 \ge y_1$. Подібно отримаємо $z_2 \le z_1$.

Далі, використавши принцип математичної індукції, отримаємо $y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n$, що і доводить теорему.

Теорема 2. Якщо справджуються умови А)- В) і крім того для рівняння (1) існує розв'язок $x^* \in E$ і для $n=0$ маємо

$$y_0 \le y_1 \le x^* \le z_1 \le z_0, \quad (10)$$

то тоді справедливим є співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n, (n=0,1....). \quad (11)$$

Доведення. Подібно, як в теоремі 1, доводиться, що $y_2 \le x^*$ і $z_2 \ge x^*$. Використовуючи принцип математичної індукції, одержимо співвідношення (11).

Дослідимо ітераційний процес (6) на збіжність. Для цього в (6) від першого рівняння віднімемо друге і згрупуємо

$$-H(Ly_n,y_n)L(z_{n+1}-y_{n+1})+H((Ly_n,y_n)L(z_n-y_n)+G_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-y_{n+1})-G_1(y_n,z_n)(z_n-y_n)-$$
$$-\alpha_1(y_n,z_n)(-z_{n+1}-z_n)+F(Lz_n,z_n)-F(Ly_n,y_n)=0,$$
$$\left[H(Ly_n,y_n)-G_1(y_n,z_n)\right]\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)=\left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right](z_n-y_n)-\alpha_1(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1})+$$
$$F(Lz_n,z_n)-F(Ly_n,y_n)$$

Враховуючи додатність оператора α_1 та ліпшицієвість оператора F, тобто (3) та (4), отримуємо

$$\left[H(Ly_n,y_n)-G_1(y_n,z_n)\right](z_{n+1}-y_{n+1})=\left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right](z_n-y_n)+F(Lz_n,z_n)-$$
$$-F(Ly_n,y_n) \le \left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right](z_n-y_n)-H(Ly_n,Lz_n)L(z_n-y_n)+$$
$$+\left(G_1\left(y_n,z_n\right)+\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\right)\left(z_n-y_n\right)=\left[H\left(Ly_n,y_n\right)L-H\left(Ly_n,Lz_n\right)L+\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\right](z_n-y_n),$$
$$z_{n+1}-y_{n+1} \le \left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right]^{-1}\left[H\left(Ly_n,y_n\right)L-H(Ly_n,Lz_n)L+\alpha_1(y_n,z_n)\right](z_n-y_n).$$

Позначимо $Q_n(y_n,z_n)=H(Ly_n,y_n)L-H(Ly_n,Lz_n)L+\alpha_1(y_n,z_n)$.

Тоді отримаємо $z_{n+1}-y_{n+1} \le \left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right]^{-1}Q_n(y_n,z_n)(z_n-y_n)$.

Якщо $\|Q_n(y_n,z_n)\| \le g\|z_n-y_n\|^{\gamma}, \gamma \ge 0$, то $\|z_{n+1}-y_{n+1}\| \le C\|z_n-y_n\|^{\gamma+1}$, де $C=g\left[H(Ly_n,y_n)L-G_1(y_n,z_n)\right]^{-1}$.

У випадку $\gamma=0$ матимемо лінійну збіжність, а при $\gamma=1$ – квадратичну збіжність.

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. К., 1980. 2. Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Т. 1, Таллин, 1981.

УДК 519.6

Р.Й.Петрович
Національний університет “Львівська політехніка“,
кафедра обчислювальної математики і програмування

ПРО ЗБІЖНІСТЬ БАГАТОКРАТНИХ АГРЕГАТИВНО-ІТЕРАТИВНИХ АЛГОРИТМІВ

Для запропонованих раніше агрегативно-ітеративних алгоритмів отримано новий критерій збіжності, який легко перевіряється на практиці. На основі цього критерію запропоновано простий спосіб обчислення параметрів, потрібних для побудови агрегативно-ітеративних алгоритмів.

For offered before aggregative-iterational algorithms the more effective criterion of convergence is obtained. A simple mode of deriving of iterative parameters, the conditions of convergence and estimations of error bounds are also obtained.

У [1] побудовані ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь в скінченновимірному просторі, названі багатократними агрегативно-ітеративними алгоритмами. Для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

де $x \in R^N$, $b \in R^N$, A – матриця розміру N×N, пропонувався ітераційний алгоритм

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2}$$

$$y^{(n+1)} = (I - \Lambda + \alpha)^{-1}\left(-\Phi^T A_2 x^{(n)} + \alpha y^{(n)}\right), \tag{3}$$

де $x^{(n)} \in R^N$, $y^{(m)} \in R^m$ – ітераційні параметри, Λ, α – матриці розміру m×m, $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_m)$, a - матриця розміру N×m, Φ – матриця розміру N×m і $\Phi^T a + \alpha = \Lambda$, $A_2 = A - \Psi\Lambda\Phi^T$, Ψ – матриця розміру N×m, $\Phi^T\Psi = I$, I – одинична матриця розміру m×m. Для вибору початкових наближень було побудовано множину

$$\varepsilon_m = \left\{ \{x, y\} \middle| x \in R^N, y \in R^m, \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1}\Phi^T b \right\}. \tag{4}$$

Ітераційний процес (2),(3) у просторі R^{N+m} можна подати у вигляді

$$z^{(n+1)} = Cz^{(n)} + d, \tag{5}$$

де $z^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} b \\ \Theta_m \end{pmatrix}$, $\Theta_m \in R^m$ – вектор з нульовими компонентами,