$$M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -c_1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

чи відповідно

$$M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_1\end{pmatrix}.$$

4.9. Інші комбінації наведених вище умов призводять до нових задач на власні значення, які в силу виконання рівності $M^*JM = N^*JN$ вписуються в схему (5), (8).

1.Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. К., 1994. С. 1-54. (Препр. / НАН України ІППММ.: № 2-94). 2. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісн. ДУ “Львівська політехніка” 1996. № 299. С. 165-170. 3. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М., 1973. 4. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т.1. М., 1978.

УДК 512.64

Щедрик В. П.
ІППММ НАН України

ПРО ДІЛЬНИКИ МАТРИЦЬ ТА ІНВАРІАНТИ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Доведена теорема єдиності дільників матриць з заданою наперед канонічною діагональною формою. Описані деякі інваріанти перетворювальних матриць.

The uniqness theorem for divisors of matrices with preassigned canonical diagonal form is proved. Some invariants of transforming matrices is described.

Нехай R – комутативна область елементарних дільників, тобто комутативна область, над якою кожна матриця володіє канонічною діагональною редукцією. У першій частині статті досліджується єдиність дільників матриць, які мають деяку наперед задану канонічну діагональну форму (к.д.ф.). Зауважимо, що аналогічне вже розглядалось В.Р. Зеліском [1] у випадку многочленних кілець, З.І. Боревичем [2] та В.М. Петричковичем [3] у випадку областей головних ідеалів

Теорема 1. *Для того щоб* $n \times n$ *матриця* A *з к.д.ф.* $\Psi = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon_k \neq 0$, *мала лише один з точністю до асоційовності дільник з к.д.ф.* $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_t, 0, \ldots, 0)$, $\varphi_t \neq 0$, *необхідно та достатньо, щоб*

a) у випадку $t = k = n$ *виконувалась умова:*

i) $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = \overline{1, n-1}$;

b) у випадку $t = n$, $k < n$ *виконувались умови:*

i) $\varphi_{\kappa+1} = \varphi_{\kappa+2} = \cdots = \varphi_n$,

ii) $(\varphi_n, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = \overline{1, k}$;

c) у випадку $t < n$ *виконувались умови:*

i) $k = t$,

ii) $(\varphi_t, \varepsilon_j) = \varphi_j$, $j = \overline{1, t-1}$.

Доведення. Згідно з теоремою 2 із роботи [4] матриця A має лише один дільник з к.д.ф. Φ, тоді і тільки тоді, коли множина $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$, яка складається з усіх $n \times n$ обротних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} L_1 & * \\ L_2 & * \\ \mathbf{0} & * \end{matrix} \right\|,$$

де

$$L_1 = \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1k-1} & l_{1k} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2k-1} & l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_1)} l_{k1} & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_2)} l_{k2} & \ldots & \frac{\varphi_k}{(\varphi_k, \varepsilon_{k-1})} l_{kk-1} & l_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

$$L_2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_1)} l_{k+11} & \ldots & \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1}, \varepsilon_k)} l_{k+1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_1)} l_{t1} & \ldots & \frac{\varphi_t}{(\varphi_t, \varepsilon_k)} l_{tk} \end{matrix} \right\|$$

збігається з групою оборотних матриць $\mathbf{G}_\Phi$ вигляду

$$\left\| \begin{matrix} H_1 & * \\ \mathbf{0} & H_2 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1t-1} & h_{1t} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2t-1} & h_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_t}{\varphi_1} h_{t1} & \frac{\varphi_t}{\varphi_2} h_{t2} & \ldots & \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}} h_{tt-1} & h_{tt} \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

$H_2 \in GL_{n-t}(R)$. У випадку *a*) множини $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ та $\mathbf{G}_\Phi$ складаються з оборотних матриць відповідно вигляду (1) та (2). Рівність цих множин еквівалентна тому, що

$$(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j,\ i=\overline{2,n},\ j=\overline{1,n-1},\ i>j.$$

Тобто, зокрема, виконується умова *i*). Навпаки, з умови *i*) випливає $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_j},\frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right)=1$, $j=\overline{1,n-1}$. Отже, $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right)=1$, $i=\overline{j+1,n}$. Тому $(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\frac{\varepsilon_j}{\varphi_j}\right)=\varphi_j$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1,n-1}$, $i>j$.

Розглянемо випадок *b*). В множині $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ існує матриця L вигляду

$$L=\left\|\begin{matrix}
1 & 0 & & & & & & 0\\
\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} & 1 & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\
\vdots & & \ddots & 1 & & & & \\
\frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_1)} & \dots & \dots & \frac{\varphi_{k+1}}{(\varphi_{k+1},\varepsilon_k)} & 1 & & & \\
\vdots & & & \vdots & 1 & 1 & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\
\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} & \dots & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_k)} & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{matrix}\right\|.$$

Оскільки матриця L також належить групі $\mathbf{G}_\Phi$, то $\frac{\varphi_{k+2}}{\varphi_{k+1}}=\frac{\varphi_{k+3}}{\varphi_{k+2}}=\ldots=\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}=1$, причому

$$(\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j,\ i=\overline{2,n},\ j=\overline{1,k},\ i>j. \tag{3}$$

Отже, $\varphi_{\kappa+1}=\varphi_{\kappa+2}=\cdots=\varphi_n$. Аналогічно, як і при розгляді випадку *a),* можна показати, що умови (3) та *ii)* еквівалентні. Неважко переконатись, що і навпаки з умов *i), ii)* випливає рівність $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)=\mathbf{G}_\Phi$.

Розглянемо випадок *c*). Згідно з наслідками 3 та 4 із [4] відповідно матриці, які належать множині $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ та групі $\mathbf{G}_\Phi$ мають нульові блоки розмірів $(n-t)\times k$ та $(n-t)\times t$. Тоді з рівності $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)=\mathbf{G}_\Phi$ випливає $k=t$. Крім того, як і у попередніх випадках показуємо, що $(\varphi_t,\varepsilon_j)=\varphi_j$, $j=\overline{1,t-1}$. Правильними будуть і обернені міркування. Теорема доведена.

Зауваження. У теоремі 5 із роботи [4] допущена помилка. У теоремі 1 цієї роботи ми цю помилку виправили.

Нехай B – неособлива $n\times n$ матриця над R. Оскільки R є областю елементарних дільників, тому матриця B редукується до своєї канонічної діагональної форми Φ, тобто для неї існують такі оборотні матриці P та Q, що

$$PBQ=\Phi=\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\varphi_i\,|\,\varphi_{i+1},\ i=\overline{1,n-1},\ \varphi_n\neq 0.$$

Матриці P та Q називаються лівою та правою перетворювальними матрицями матриці B, відповідно. Множину лівих перетворювальних матриць матриці B позначимо через $\mathbf{P}_B$. Як випливає із результатів робіт [4,5], множина $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Phi P$, де $\mathbf{G}_\Phi$ – група оборотних матриць вигляду (2). Тобто $\mathbf{P}_B$ є лівим класом суміжності при факторизації $GL_n(R)$ за її підгрупою $\mathbf{G}_\Phi$. У [4] показано, що множина $\mathbf{P}_B$ відіграє центральне значення в описанні дільників матриць. Друга частина нашої роботи присвячена пошуку інваріантів преретворювальних матриць.

Нехай U – примітивна $m \times n$, $m \le n$, матриця над R, тобто матриця найбільший спільний дільник (н.с.д.) мінорів максимального порядку якої дорівнює одиниці. Позначимо через $U_{i_1 \ldots i_k}$ матрицю, яка складається зі стовпців $i_1, \ldots, i_k$ матриці U, $1 \le k \le m$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.

Лема. *Н.с.д. мінорів максимального порядку матриці U, які містять матрицю $U_{i_1 \ldots i_k}$ дорівнює н.с.д. мінорів максимального порядку матриці $U_{i_1 \ldots i_k}$.*

Доведення. У випадку $k = m$ твердження леми є тривіальним. Нехай $1 \le k < m$. Домножимо матрицю U справа на таку оборотну матрицю L, що

$$UL = \left\| S \; U_{i_1 \ldots i_k} \right\|.$$

Для матриці $U_{i_1 \ldots i_k}$ існує така оборотна матриця K, що

$$KU_{i_1 \ldots i_k} = \left\| \begin{matrix} u_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & u_k \\ & \mathbf{0} & \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} U'_{i_1 \ldots i_k} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де $U'_{i_1 \ldots i_k}$ – $k \times k$ матриця. Тоді

$$KUL = K \left\| S \quad U_{i_1 \ldots i_k} \right\| = \left\| \begin{matrix} * & U'_{i_1 \ldots i_k} \\ T & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|.$$

Кожний мінор максимального порядку матриці KUL, який містить матрицю $\left\| \begin{matrix} U'_{i_1 \ldots i_k} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right\|$ має вигляд

$$\det \left\| \begin{matrix} * & U'_{i_1 \ldots i_k} \\ T_{m-k} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|,$$

де T_{m-k} – $(m-k) \times (n-k)$ підматриця матриці T. Тому н.с.д. таких мінорів дорівнює $u_1 \ldots u_k \tau$, де τ н.с.д. мінорів максимального $(m-k)$-го порядку матриці T. Оскільки матриця KUL є примітивною, тому примітивною також буде і матриця T. Отже, $\tau = 1$. Врахувавши тепер, що кожен необхідний нам мінор максимального порядку матриці U відрізняється від відповідного йому мінора матриці KUL щонайбільше як на одиницю кільця R, а саме визначник оборотної матриці, переконуємось у правильності нашого твердження.

Позначимо через U^m матрицю, яка складається з m останніх рядків матриці U, $1 \le m < n$; $U^m_{i_1 \dots i_k}$ - матрицю складену зі стовпців $i_1, \dots, i_k$ матриці U^m, $1 \le k \le n$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$; $\delta^m_{i_1 \dots i_k}$ - н.с.д. мінорів максимального порядку матриці $U^m_{i_1 \dots i_k}$.

Теорема 2. *Нехай* $U \in \mathbf{P}_B$. *Тоді для всіх наборів індексів* $i_1, \dots, i_k$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, *елементи* $\delta^m_{i_1 \dots i_k}$ *є інваріантами у класі перетворювальних матриць* $\mathbf{P}_B$, *тобто*

$$\left(\delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right),\ m = \overline{1, n-1},\ k = \overline{1, n},$$

де $\Delta^m_{i_1 \dots i_k}$ *- н.с.д. мінорів максимального порядку матриці* $(HU)^m_{i_1 \dots i_k}$, $H \in \mathbf{G}_\Phi$.

Доведення. Нехай $m \le k \le n$. Виберемо в матриці $U^m_{i_1 \dots i_k}$ довільний мінор максимального m-го порядку γ. Відповідний йому мінор матриці $(HU)^m_{i_1 \dots i_k}$ позначимо через γ'. Згідно з теоремою із [6], яка залишається правильною і у випадку областей елементарних дільників,

$$\left(\gamma, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\gamma', \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right).$$

Зваживши на те, що $\delta^m_{i_1 \dots i_k}$ є н.с.д. всеможливих мінорів m-го порядку матриці $U^m_{i_1 \dots i_k}$, отримуємо

$$\left(\delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right).$$

Розглянемо випадок $1 \le k < m$. Нехай $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ всеможливі мінори максимального k-го порядку матриці U^m, які містять матрицю $U^m_{i_1 \dots i_k}$. Відповідні їм мінори матриці $(HU)^m$ позначимо через $\gamma'_1, \dots, \gamma'_s$. На підставі леми

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_s) = \delta^m_{i_1 \dots i_k},\ (\gamma'_k, \dots, \gamma'_s) = \Delta^m_{i_1 \dots i_k}.$$

Крім того, знову використавши теорему із [6], отримаємо

$$\left(\delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\gamma_1, \dots, \gamma_s, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\left(\gamma_1, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right), \dots, \left(\gamma_s, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right)\right) =$$

$$= \left(\gamma'_1, \dots, \gamma'_s, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right) = \left(\Delta^m_{i_1 \dots i_k}, \frac{\varphi_{n-m+1}}{\varphi_{n-m}}\right).$$

1. Зеліско В.Р. Єдиність унітальних дільників матричного многочлена //Вісник Львівського ун-ту. Серія мех.-мат., 1983, Вип. 30. с. 36-38. 2. Боревич З.И. О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту, 21-24 сент. 1976, Тезисы сообщ. Тарту: Тарт. ун-т, 1976, с. 19. 3. Петричкович В.М. Про діагоналізовність наборів матриць та єдиність їх факторизацій // Вісник державного університету «Львівська політехніка», 1999, № 364, с. 177-180. 4. Щедрик В.П. Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Математичні студії , 1998, 10, №. 2, с. 115 - 120.

5. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, № 12, с. 14-21. 6. Мельник О.М. Об инвариантах преобразующих матриц // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов // Сб. науч. тр. АН УССР. Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. - Киев, Наукова думка, 1989, с. 160-164.

УДК 517.28

О.С.Гаврилів
Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра прикладної математики

НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРАТНИХ АБСТРАКТНИХ ВІНЕРІВСЬКИХ ІНТЕГРАЛІВ

У цій роботі розглянутий розвиток теорії інтегрування в багатомасштабних нескінченно–вимірних многовидах в абстрактних вінерівських просторах. Наведені нелінійні перетворення кратних абстрактних вінерівських інтегралів.

The purpose of this paper is to develop an integration theory over a suitable kind of infinite–dimensional manifold under the name of an abstract Wiener spaces. It is demonstrated the nonlinear transformations of multiple abstract Wiener integrals.

Має місце

Лема 1. Нехай T – диференційовне відображення вигляду $T = I + K$, діюче в R^n, де I – тотожний оператор, $dim\, K\left(R^n\right) = m$, $m < n$; K – сюр'єктивне; існує $K^{-1} : R^m \to R^n$, $\|K'\| < 1$. Тоді $dim\, K^{-1}\left(R^m\right) = m$.

Тут K' – похідна Фреше.

Доведення. Якщо u – лінійне неперервне обертовне відображення банахового простору E в банахів простір F, v – лінійне неперервне відображення E в F, що задовольняє нерівність

$$\|v\| < \left\|u^{-1}\right\|^{-1},$$

то лінійне неперервне відображення $(u + v)$ простору E в простір F також є обертовним [1, ст.140]. Отже, для T – неперервно диференційовного відображення деякої відкритої множини $U < E$ в F, де E і F – скінченновимірні, обертовність $T'(a)$, $a \in U$ [1, ст.311] означає, що E і F є однієї розмірності і якобіан T в т. a у вибраній системі координат відмінний від нуля, – одержимо $dim\, K^{-1}\left(R^m\right) = m$ і якобіан $T = (I + K) : R^m \to R^m$ відмінний від нуля. Лему доведено.

Використовуємо попередні позначення.

Нехай $T = I + K$ – нелінійне відображення $B_{(l)}$ в себе,

$K_{j.}(x_{1.}, x_{2.}, ..., x_{l.}) \in H_j$, $\dfrac{\delta K_{m.}}{\delta x_{j.}}$ – часткова похідна Фреше,