УДК 517.91

Р.М.Тацій, М.Ф.Стасюк, В.В.Кісілевич, В.В.Мазуренко
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра будівельної механіки

УЗАГАЛЬНЕНІ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

У роботі досліджені узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку та отримані їх основні спектральні властивості. Суттєві моменти продемонстровані на прикладі.

In the work generalized discrete-continuous boundary problems for vector guasi-differential equation of the fouth order are investigated and fundamental spectral properties of it are obtained. Essential moments have been demonstrated in example.

Як відомо [1], основним ефективним засобом під час побудови лінійної теорії диференціальних рівнянь з мірами є зведення таких рівнянь до еквівалентної диференціальної системи. Подібне можна стверджувати стосовно крайових задач для названих об'єктів. При цьому важливим моментом, що завдає певних труднощів у кожному конкретному випадку, а тому заслуговує на особливу увагу, є приведення крайових умов до деякого еквівалентного вигляду.

Розглянемо задачу на власні значення

$$\left(b_0(x)y''\right)'' - \left(b_1(x)y'\right)' + b_2(x)y - \lambda\left[-\left(a_1(x)y'\right)' + a_2(x)y\right] = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4} p_{\kappa\nu} y^{[\nu-1]}(a) = \sum_{\nu=1}^{4} q_{\kappa\nu} y^{[\nu-1]}(b), \kappa = \overline{1,4}, \tag{2}$$

де $y(x)$ – n-вимірний вектор; $b_i(x), i = \overline{0,2}$, $a_j(x), j = \overline{1,2}$, $p_{\kappa\nu}, q_{\kappa\nu}, \kappa, \nu = \overline{1,4}$ – квадратні (n×n) матриці, причому $p_{\kappa\nu}, q_{\kappa\nu}$ – сталі матриці; λ – (комплексний) параметр; $y^{[i]}(x), i = \overline{0,3}$ – квазіпохідні квазідиференціального рівняння (1), які визначають так:

$$y^{[0]} \overset{def}{=} y,\ y^{[1]} = y',\ y^{[2]} = b_0(x)y'',\ y^{[3]} = \left(b_1(x) - \lambda a_1(x)\right)y' - \left(b_0(x)y''\right)'. \tag{3}$$

Вважатимемо також, що $b_i(x) = b_i^*(x), i = \overline{0,2}$, $a_j(x) = a_j^*(x), j = \overline{1,2}$ – комплекснозначні матриці-функції дійсної змінної x, причому $b_0^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна за Лебегом на $[a,b]$, $b_i(x) = \beta_i'(x), a_i(x) = \alpha_i'(x), i = \overline{1,2}$ – узагальнені похідні від матриць-функцій обмеженої на $[a,b]$ варіації $\alpha_i(x)$ і $\beta_i(x)$. Припускатимемо додатково, що елементи матриць $\alpha_i(x), i = \overline{1,2}$ неспадні на $[a,b]$.

Задачу (1), (2) частково розглядали в роботі [2], де, зокрема, отримані її спектральні властивості. Очевидно, накладені там крайові умови вписуються в схему (2). Треба зауважити, що умови (2) охоплюють також умови типу Штурма-Ліувілля й періодичні умови. Нагадаємо, що лінійна теорія квазідиференціального рівняння (1), включаючи поняття його розв'язку, викладена в [1].

2. Легко бачити, що за допомогою квазіпохідних (3) і вектора $Y(x) = colon\left(y(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x), y^{[3]}(x)\right)$ квазідиференціальне рівняння (1) зводиться до коректної [1] диференціальної системи першого порядку (0 і E_n відповідно нульова та одинична (n×n) матриці)

$$Y'(x) = \left[\begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & b_1(x) & 0 & -E_n \\ b_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1(x) & 0 & 0 \\ -a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot Y(x).$$

Остання після домноження зліва на косоермітову блокову матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 \\ E_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

набуває вигляду

$$J \cdot Y'(x) = \left[\begin{pmatrix} -b_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1(x) & 0 & E_n \\ 0 & 0 & b_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_2(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot Y(x)$$

або

$$J \cdot Y'(x) = \left[B'(x) + \lambda A'(x)\right] \cdot Y(x) \tag{5}$$

з ермітовими (внаслідок накладених умов на коефіцієнти) блоковими матрицями $A'(x)$ і $B'(x)$.

Для зручності введемо в розгляд блокові матриці порядку 4n

$$P = \left(p_{ij}\right), Q = \left(q_{ij}\right),\ i, j = \overline{1,4}.$$

Тоді крайові умови (2) в матричному вигляді запишемо

$$P \cdot Y(a) = Q \cdot Y(b). \tag{2$'$}$$

Покажемо, що для довільного 4n-вимірного ненульового вектора $v = colon(v_1, v_2, v_3, v_4)$, де v_i, $i = \overline{1,n}$ – довільні сталі n-вимірні вектори, за допомогою блочних матриць

$$M = -J^{-1}P^*,\ N = -J^{-1}Q^*, \tag{6}$$

де P^* і Q^* – ермітово спряжені до матриць P і Q і до того ж

$$PJ^{-1}P^* = QJ^{-1}Q^*, \tag{7}$$

крайова умова ($2'$) зводиться до умов

$$Y(a) = Mv,\ Y(b) = Nv \tag{8}$$

і навпаки, причому виконується рівність

$$M^* JM = N^* JN \tag{9}$$

(тут, як і вище, зірочка (*) означає ермітове спряження).

Дійсно, в $(2')$ покладемо $Y(a) = -J^{-1}P^*v,\ Y(b) = -J^{-1}Q^*v$, де вектор v визначений раніше. Останнє є можливим внаслідок виконання рівності (7). Отримаємо крайові умови (8) з матрицями $\mathbf{M}$ і $\mathbf{N}$, що визначаються рівностями (6). При цьому

$$M^* JM - N^* JN = \left(-J^{-1}P^*\right)^* J\left(-J^{-1}P^*\right) - \left(-J^{-1}Q^*\right)^* J\left(-J^{-1}Q^*\right) =$$

$$= P\left(J^*\right)^{-1} JJ^{-1}P^* - Q\left(J^*\right)^{-1} JJ^{-1}Q^* = -PJ^{-1}P^* + QJ^{-1}Q^* = 0,$$

тобто справедлива рівність (9).

Навпаки, виходячи з умов (8) і беручи до уваги рівності (6), (7), приходимо до умови $(2')$

$$P \cdot Y(a) - Q \cdot Y(b) = P \cdot Mv - Q \cdot Nv = -\left(PJ^{-1}P^* - QJ^{-1}Q^*\right)v = 0.$$

3. Спектральні властивості задачі (5), (8) сформульовані в [2]. Очевидно, що відповідні властивості задачі на власні значення (1), (2) отримуються тепер як наслідки з відповідних теорем.

Наслідок 1. Власні значення $\lambda_k, k = 1,2,\ldots$ задачі (1), (2) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки; при цьому $\forall \varepsilon > 0 \ \sum\limits_{\lambda_\kappa \neq 0} \left|\lambda_\kappa\right|^{-1-\varepsilon} < \infty.$

Наслідок 2. Нормовані власні вектор-функції $y_k(x,\lambda_k)$ задачі (1), (2) задовольняють умову

$$\int_a^b y_m^{*\prime}(x,\lambda_m) d\alpha_1(x) y_n'(x,\lambda_n) + \int_a^b y_m^*(x,\lambda_m) d\alpha_2(x) y_n(x,\lambda_n) = \delta_{mn},$$

де δ_{mn} – символ Кронекера.

Наслідок 3. Нехай вектор-функція $\rho(x)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ разом зі своєю похідною $\rho'(x)$, а вектор-функція $\varphi(x)$ задовольняє неоднорідне векторне квазідиференціальне рівняння

$$\left(b_0(x)\varphi''\right)'' - \left(b_1(x)\varphi'\right)' + b_2(x)\varphi = -\left(a_1(x)\rho'(x)\right)' + a_2(x)\rho(x)$$

і крайові умови (2). Для довільного $\Lambda > 0$ позначимо

$$\varphi_\Lambda^{[i]}(x) = \varphi^{[i]}(x) - \sum_{|\lambda_k| < \Lambda} d_k y_k^{[i]}(x,\lambda_k),\ i = \overline{0,1},$$

де

$$\varphi \sim \sum_k d_k y_k(x,\lambda_k), \tag{10}$$

а коефіцієнти Фур'є задаватимемо рівностями

$$d_k = \int_a^b y_k^{*\prime}(x,\lambda_k) d\alpha_1(x)\varphi'(x) + \int_a^b y_k^*(x,\lambda_k) d\alpha_2(x)\varphi(x).$$

Тоді ряд Фур'є (10), збігаючись абсолютно в рівномірній нормі разом з рядом із похідних, наближає функцію $\varphi(x)$ в тому сенсі, що

$$\int_a^b \varphi_\Lambda^{*\prime}(x)d\alpha_1(x)\varphi'_\Lambda(x)+\int_a^b \varphi_\Lambda^{*}(x)d\alpha_2(x)\varphi_\Lambda(x)\le$$

$$\le \Lambda^{-2}\left(\int_a^b \rho^{*\prime}(x)d\alpha_1(x)\rho'(x)+\int_a^b \rho^{*}(x)d\alpha_2(x)\rho(x)\right).$$

4. При дослідженні власних коливань балки на сингулярній пружній основі за наявності поздовжньої стискаючої сили ([3], с. 623) після відокремлення змінних приходимо до рівняння

$$\left(EIy''\right)''+\left[(N-k_2)y'\right]'+k_1y-\lambda\left[m^*y-\left(\mu^*y'\right)'\right]=0$$

відносно форми $y(x)$ власних коливань. Тут λ – параметр частоти власних коливань; E,I,N,k_1,k_2,m^*,μ^* – механічні та геометричні характеристики балки. Якщо ввести стандартні позначення

$$EI(x)=b_0(x),(k_2-N)(x)=b_1(x),k_1(x)=b_2(x),\mu^*(x)=a_1(x),m^*(x)=a_2(x),$$

то це рівняння запишеться у звичному вигляді (1) з тією лише різницею, що тепер воно скалярне. Зауважимо, що в такому разі матриця (4) набуває вигляду

$$J=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Додаючи до (1) певні крайові умови, отримаємо задачі про власні коливання балки з відповідним способом закріплення кінців. Нагадаємо, що допустимими крайовими умовами вважаються ті, які задовольняють рівність (7). Нижче, для прикладу, розглянемо (див. рисунок) декілька варіантів закріплення кінців балки ([4], с. 153).

4.1. Нехай обидва кінці балки закріплені жорстко (схема 1), тоді до рівняння (1) необхідно додати крайові умови

$$y(0)=y^{[1]}(0)=0,\ y(l)=y^{[1]}(l)=0.$$

Перейшовши до задачі (5), (8) матриці M і N згідно з рівностями (6) потрібно вибрати так:

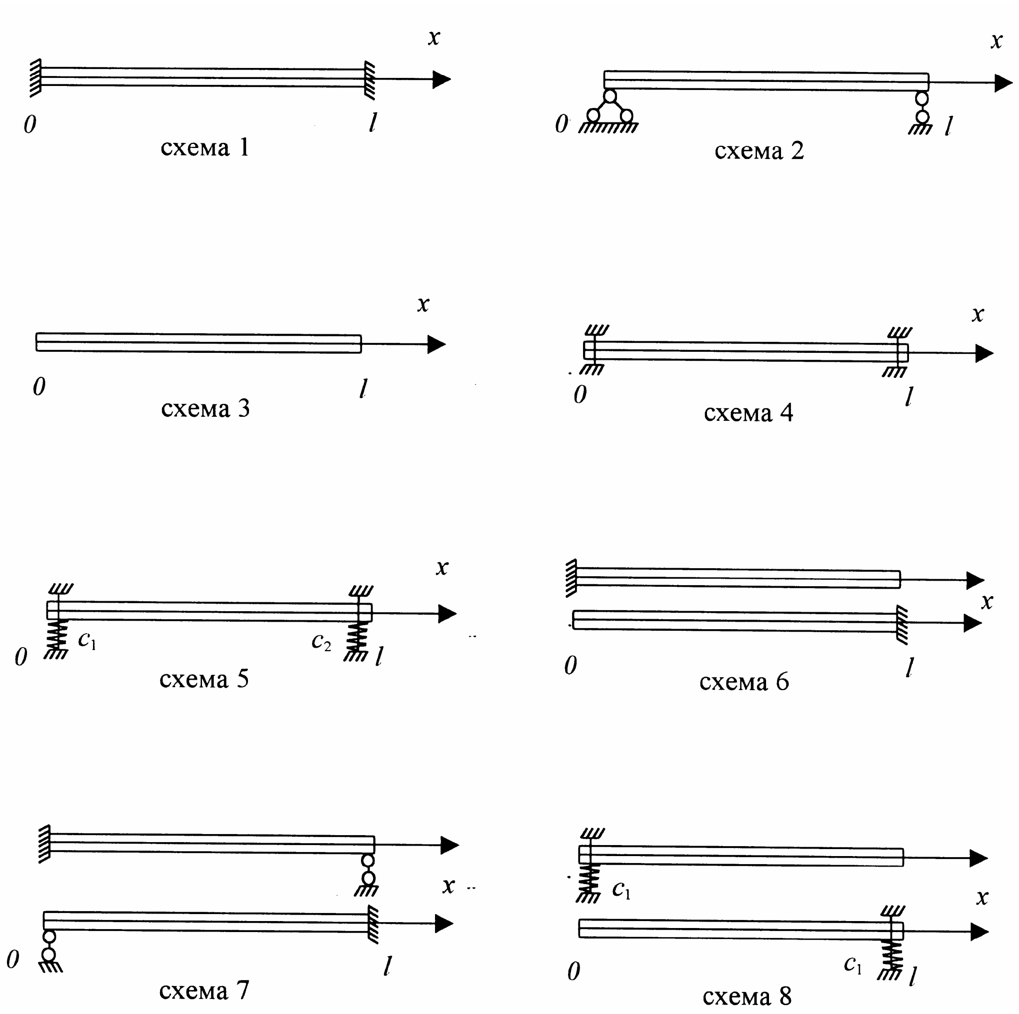
$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

4.2. У випадку шарнірного закріплення обох кінців балки (схема 2) повинні виконуватись умови

$$y(0)=y^{[2]}(0)=0,\ y(l)=y^{[2]}(l)=0.$$

Тоді M і N треба вибрати так:

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$



Схеми закріплень кінців балки

4.3. Якщо кінці балки вільні (схема 3), то крайові умови мають вигляд

$$y^{[2]}(0) = y^{[3]}(0) = 0,\ y^{[2]}(l) = y^{[3]}(l) = 0.$$

При цьому

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. Нехай обидва кінці балки защемлені рухомо (схема 4), тоді потрібно накласти крайові умови

$$y^{[1]}(0) = y^{[3]}(0) = 0,\ y^{[1]}(l) = y^{[3]}(l) = 0.$$

У такому випадку M і N вибирають так:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5. У випадку пружного закріплення обох кінців балки (схема 5) умови мають вигляд

$$y^{[1]}(0) = y^{[3]}(0) - c_1 y(0) = 0,\ y^{[1]}(l) = y^{[3]}(l) + c_2 y(l) = 0\ ,$$

тоді

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

4.6. Нехай лівий кінець балки закріплений жорстко, а правий – вільний чи навпаки (схема 6), тоді до рівняння (1) необхідно додати крайові умови

$y(0) = y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[2]}(l) = y^{[3]}(l) = 0$ або $y^{[2]}(0) = y^{[3]}(0) = 0,\ y(l) = y^{[1]}(l) = 0$ відповідно.

При цьому M і N вибирають відповідно так:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.7. Якщо лівий кінець балки закріплений жорстко, а правий – шарнірно чи навпаки (схема 7), то крайові умови відповідно мають вигляд

$y(0) = y^{[1]}(0) = 0,\ y(l) = y^{[2]}(l) = 0$ або $y(0) = y^{[2]}(0) = 0,\ y(l) = y^{[1]}(l) = 0.$

При цьому

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

або відповідно

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8. У випадку, коли лівий кінець закріплений пружно, а правий – вільний чи навпаки (схема 8), потрібно накласти умови

$y^{[1]}(0) = y^{[3]}(0) - c_1 y(0) = 0,\ y^{[2]}(l) = y^{[3]}(l) = 0$ або $y^{[2]}(0) = y^{[3]}(0) = 0,\ y^{[1]}(l) = y^{[3]}(l) + c_1 y(l) = 0\ .$

Тоді

$$M=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&-c_1&0&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

чи відповідно

$$M=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&c_1\end{pmatrix}.$$

4.9. Інші комбінації наведених вище умов призводять до нових задач на власні значення, які в силу виконання рівності $M^*JM = N^*JN$ вписуються в схему (5), (8).

1.Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. К., 1994. С. 1-54. (Препр. / НАН України ІППММ.: № 2-94). 2. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісн. ДУ “Львівська політехніка” 1996. № 299. С. 165-170. 3. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М., 1973. 4. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т.1. М., 1978.

УДК 512.64

Щедрик В. П.
ІППММ НАН України

ПРО ДІЛЬНИКИ МАТРИЦЬ ТА ІНВАРІАНТИ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Доведена теорема єдиності дільників матриць з заданою наперед канонічною діагональною формою. Описані деякі інваріанти перетворювальних матриць.

The uniqness theorem for divisors of matrices with preassigned canonical diagonal form is proved. Some invariants of transforming matrices is described.

Нехай R – комутативна область елементарних дільників, тобто комутативна область, над якою кожна матриця володіє канонічною діагональною редукцією. У першій частині статті досліджується єдиність дільників матриць, які мають деяку наперед задану канонічну діагональну форму (к.д.ф.). Зауважимо, що аналогічне вже розглядалось В.Р. Зеліском [1] у випадку многочленних кілець, З.І. Боревичем [2] та В.М. Петричковичем [3] у випадку областей головних ідеалів